خود آموز و تشریح کامل مسائل

مبانی نظریه الکترومغناطیس

بر اساس کتاب

ریتس - میلفورد - کریستی

ویرایش جدید

به انضمام

- شرح درس و نکات مهم هر فصل
- تشریح کامل مسائل هر فصل

مولفین : مهندس امین شیرانی

مهندس احسان شیرانی - مهندس فرزاد شیران

Physicsclass.blogsky.com

فهرست

عنوان صفحه

فصل اول: آنالیز برداری ۱
مسائل فصل اول ۳
فصل دوم: الکتروستاتیک ۱۱
مسائل فصل دوم ۱۳
فصل سوم: حل مسائل الکتروستاتیک ۲۵
مسائل فصل سوم ۲۸
فصل چهارم: میدان الکتروستاتیک در محیط‌های دی‌الکتریک ۴۱
مسائل فصل چهارم ۴۳
فصل پنجم: نظریهٔ میکروسکوپی دی‌الکتریک‌ها ۵۳
مسائل فصل پنجم ۵۴
فصل ششم: انرژی الکتروستاتیکی ۵۷
مسائل فصل ششم ۵۸
فصل هفتم: جریان الکتریکی ۶۹
مسائل فصل هفتم ۷۱
فصل هشتم: میدان مغناطیسی جریان‌های پایا ۸۳
مسائل فصل هشتم ۸۶
فصل نهم: خواص مغناطیسی ماده ۹۹
مسائل فصل نهم ۱۰۲
فصل دهم: نظریهٔ میکروسکوپی مغناطیس ۱۱۱
مسائل فصل دهم ۱۱۲
فصل یازدهم: القای الکترومغناطیسی ۱۱۵
مسائل فصل یازدهم ۱۱۶

Physicsclass.blogsky.com

فصل دوازدهم: انرژی مغناطیسی ۱۲۷
مسائل فصل دوازدهم ۱۲۹

فصل سیزدهم: جریانهای کُند تغییر ۱۳۷
مسائل فصل سیزدهم ۱۳۸

فصل چهاردهم: فیزیک پلاسما ۱۴۷
مسائل فصل چهاردهم ۱۴۷

فصل پانزدهم: خواص الکترومغناطیسی ابر رسانا ۱۵۱
مسائل فصل پانزدهم ۱۵۱

فصل شانزدهم: معادلات ماکسول ۱۵۷
مسائل فصل شانزدهم ۱۶۰

فصل هفدهم: انتشار امواج الکترومغناطیسی تکفام ۱۶۷
مسائل فصل هفدهم ۱۷۰

فصل هجدهم: امواج تکفام در ناحیه‌های مرزدار ۱۷۷
مسائل فصل هجدهم ۱۸۴

فصل نوزدهم: پاشندگی و میدان‌های نوسان‌کننده در محیط‌های پاشنده ۱۹۷
مسائل فصل نوزدهم ۱۹۸

فصل بیستم: گسیـل تابـش ۲۰۳
مسائل فصل بیستم ۲۰۵

فصل بیست و یکم: الکترودینامیک ۲۱۱
مسائل فصل بیست و یکم ۲۱۱

فصل بیست و دوم: نظریهٔ خاص نسبیت ۲۱۳
مسائل فصل بیست و دوم ۲۱۴

physicsclass.blogsky.com

۱
آنالیز برداری

کمیتهای برداری و نرده‌ای

کمیتها را می‌توان به دو دسته برداری و نرده‌ای تقسیم کرد. کمیت نرده‌ای کمیتی است که به کمک اندازه‌اش کاملاً مشخص می‌شود، مانند: جرم، زمان، حجم و... کمیت برداری کمیتی است که با استفاده از اندازه و جهتش کاملاً مشخص می‌شود، مانند: سرعت، شتاب، نیرو و...

جبر برداری

جمع برداری:

حاصل جمع دوبردار، برداری است که مؤلفه‌های آن عبارتند از مجموع مؤلفه‌های مربوط به دو بردار اصلی.

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$$

$$C_x=A_x+B_x\ ,C_y=A_y+B_y,C_z=A_z+B_z \qquad (۱-۱)$$

تفریق برداری:

عمل تفریق برداری را به کمک جمع یک بردار با منفی بردار دیگر بیان می‌شود.

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}) \qquad (۲-۱)$$

نکته: جمع و تفریق برداری شرکت‌پذیر و جابه‌جایی‌پذیر هستند.

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=(\vec{A}+\vec{C})+\vec{B}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} \qquad (۳-۱)$$

ضرب کمیت نرده‌ای در یک بردار:

حاصل ضرب یک کمیت نرده‌ای در یک بردار، برداری است که هر مؤلفه آن برابر است با حاصل ضرب کمیت نرده‌ای در مؤلفه متناظر از بردار اصلی.

$$\vec{B}=C\vec{A} \qquad (۴-۱)$$

$$B_x=CA_x\ ,B_y=CA_y,B_z=CA_z$$

ضرب نرده‌ای (داخلی، نقطه‌ای):

ضرب نرده‌ای که به صورت $\vec{A}.\vec{B}$ نوشته می‌شود، برابر است با:

$$\vec{A}.\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \qquad (۵-۱)$$

این تعریف معادل است با حاصل ضرب بزرگی دو بردار در کسینوس زاویه میان آنها.

ضرب برداری (خارجی، ضربدری):

حاصل ضرب برداری A و B برابر است با:

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B} \qquad (۶-۱)$$

$$C_x=A_yB_z-A_zB_y\ ,\ C_y=A_zB_x-A_xB_z\ ,$$

$$C_z=A_xB_y-A_yB_x$$

بزرگی حاصل‌ضرب برداری برابر است با حاصل ضرب بزرگی دو بردار در سینوس زاویه بین آنها، و جهت آن با قاعده پیچ راستگرد مشخص می‌شود.

ضرب برداری را می‌توان به کمک دترمینان بیان کرد:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (۷-۱)$$

ضرب سه گانه نرده‌ای:

حاصل ضب سه‌گانه نرده‌ای $D=\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}$ با دترمینان زیر برابر است:

$$D=\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (۸-۱)$$

این حاصل‌ضرب با تعویض جای علائم ضرب نرده‌ای و ضرب برداری و یا تعویض جای بردارها یا جایگشت دوری تغییر نمی‌کند.

ضرب سه‌گانه برداری:

با بکار بردن مکرر تعریف حاصلضرب برداری، معادله ()، نتیجه می‌شود که:

$$\vec{D}=\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B}) \qquad (۹-۱)$$

که به قاعده بک‌کب (backcob) معروف است

تقسیم برداری:

تقسیم یک بردار بر بردار دیگر تنها وقتی ممکن است که دو بردار با هم موازی باشند. از طرف دیگر، با نوشتن پاسخهای عمومی برای معادلات برداری عملیاتی خیلی شبیه به تقسیم می‌توان انجام داد. برای مثال معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$C=\vec{A}\cdot\vec{X} \qquad (۱۰-۱)$$

Physicsclass.blogsky.com

که $\vec{X}$ برداری مجهول است. پاسخ عمومی این معادله به صورت زیر است:

$$\vec{X}=\frac{C\vec{A}}{\vec{A}\cdot\vec{A}}+\vec{B} \quad , \quad \vec{A}\cdot\vec{B}=0 \qquad (۱-۱۱)$$

این عملیاتی که انجام شد به تقسیم C بر $\vec{A}$ شبیه است.

اگر معادله برداری زیر را در نظر بگیریم.

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{X} \qquad (۱-۱۲)$$

پاسخ عمومی این معادله عبارت است از:

$$\vec{X}=\frac{\vec{C}\times\vec{A}}{\vec{A}\cdot\vec{A}}+K\vec{A} \qquad (۱-۱۳)$$

K یک جهت نرده‌ای اختیاری است.بردار حاصل $\vec{X}$ تقریباً همان خارج قسمت $\vec{C}$ بر $\vec{A}$ است.

نکته: اگر لازم باشد $\vec{X}$ در دو معادله (۱-۱۰) و (۱-۱۲) صدق کند آن وقت پاسخ منحصر به فرد است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\vec{X}=\frac{\vec{C}\times\vec{A}}{\vec{A}\cdot\vec{A}}+\frac{C\vec{A}}{\vec{A}\cdot\vec{A}} \qquad (۱-۱۴)$$

گرادیان

گرادیان تابع نرده‌ای φ برداری است که بزرگی آن برابر بیشینه مشتق جهتی در نقطه موردنظر است و جهت آن جهت بیشینه مشتق جهتی در آن نقطه است، و در مختصات قائم و کروی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$grad\,\varphi=\hat{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad \text{(مختصات قائم)} \quad (۱-۱۵)$$

$$grad\,\varphi=\hat{a}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\hat{a}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\hat{a}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} \qquad \text{(مختصات کروی)} \quad (۱-۱۶)$$

انتگرال‌گیری برداری

بسته به نوع دیفرانسیلی که در انتگرال ظاهر می‌شود می‌توان سه نوع انتگرال را در نظر گرفت که عبارتند از: انتگرال خطی، انتگرال سطحی و انتگرال حجمی.

انتگرال خطی

اگر $\vec{F}$ بردار باشد، انتگرال خطی F به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{a(c)}^{b}\vec{F}(r)\cdot d\vec{L} \qquad (۱-۱۷)$$

که C منحنی است که انتگرال در امتداد آن محاسبه می‌شود و b,a نقاط ابتدا و انتها در روی این منحنی هستند و $d\vec{L}$ بردار تغییر مکان بی‌نهایت کوچک در امتداد منحنی C است.

$\vec{F}\cdot d\vec{L}$ کمیتی نرده‌ای است بنابراین حاصل انتگرال‌گیری نیز کمیتی نرده‌ای خواهد بود.

انتگرال سطحی

انتگرال سطحی بردار $\vec{F}$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_S\vec{F}\cdot\hat{n}\,da \qquad (۱-۱۸)$$

در آن S سطحی است که انتگرال‌گیری روی آن انجام می‌شود. da سطح بی نهایت کوچکی از S است و $\hat{n}$ برداریکه عمود بر da است.

انتگرال سطحی کمیتی نرده‌ای است که مقدار آن معمولاً به سطح S بستگی دارد.

انتگرال حجمی

اگر $\vec{F}$ بردار و φ یک کمیت نرده‌ای باشد، دو انتگرال حجمی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\vec{K}=\int_V\vec{F}\,dv \quad , \quad J=\int_V\varphi\,dv \qquad (۱-۱۹)$$

دیورژانس

دیورژانس هر بردار حد انتگرال سطحی آن بردار در واحد حجم، هرگاه حجم محصور شده توسط آن سطح به سمت صفر میل کند، یعنی:

$$div\,\vec{F}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S\vec{F}\cdot\hat{n}\,da \qquad (۱-۲۰)$$

شکل صحیح دیورژانس در مختصات قائم و کروی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$div\,\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z} \qquad (۱-۲۱)$$

$$div\,\vec{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} \qquad (۱-۲۲)$$

قضیه دیورژانس

انتگرال دیورژانس یک بردار در حجم V برابر است با انتگرال سطحی مؤلفه قائم آن بردار روی سطحی که V را در بر می‌گیرد، در واقع:

$$\int_V div\,\vec{F}\,dv=\oint_S\vec{F}\cdot\hat{n}\,da \qquad (۱-۲۳)$$

تاو

تاو هر بردار عبارت است از حد نسبت انتگرال سطحی ضرب برداری آن بردار در برداریکه عمود بر سطح بسته (در جهت خارج از حجم)، به حجم محصور به وسیله آن سطح، وقتی که حجم به سمت صفر میل کند، یعنی:

$$curl\,\vec{F}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S\hat{n}\times\vec{F}\,da \qquad (۱-۲۴)$$

تاو بردار $\vec{F}$ در مختصات قائم برابر بسط دترمینان ۳×۳ به صورت زیر است:

$$curl\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

physicsclass.blogsky.com

قضیه استوکس

انتگرال خطی یک بردار روی یک منحنی بسته برابر است با انتگرال سطحی مولفه قائم تاو آن بردار روی هر سطحی که توسط این منحنی محصور شده باشد، یعنی:

(۱ - ۲۶) $$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{L} = \int_S curl\vec{F}\cdot\hat{n}da$$

عملگر دیفرانسیل برداری ∇

سه نوع مشتق‌گیری برداری مختلف گرادیان، دیورژانس و تاو را می‌توان با عملگر دیفرانسیلی برداری دل، ∇، بیان کرد:

(۱ - ۲۷) (در مختصات قائم) $$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

(۱ - ۲۸) $$\vec{\nabla}\varphi = \hat{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

(۱ - ۲۹) $$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

(۱ - ۳۰) $$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

مهمترین قضایای انتگرالی در مورد مشتقها عبارتند از:

(۱ - ۳۱) $$\int_{a(c)}^{b}\vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{L} = \varphi\Big|_b^a$$

(۱ - ۳۲) (قضیه استوکس) $$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\hat{n}da = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{L}$$

(۱ - ۳۳) (قضیه دیورژانس) $$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dv = \oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,da$$

نکته: در این معادلات، انتگرال مشتق یک تابع در یک ناحیه n بعدی، بر حسب مقادیر خود تابع در مرز $(n-1)$ بعدی آن ناحیه، به ازای n برابر با ۱، ۲ و ۳ به دست می‌آید.

توسعه و تعمیم‌های بیشتر

عملیاتهای گرادیان، دیورژانس و تاو را می‌توان به طور تکراری روی انواع مناسبی از میدانها انجام داد، که حاصل این کار پنج عملگر مرتبه دوم با معنی است. اولین عملگر مرکب، عملگر لاپلاسی است که به صورت دیورژانس گرادیان یک میدان نرده‌ای تعریف می‌شود.

(۱ - ۳۴) $$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \nabla^2$$

تاو گرادیان هر میدان نرده‌ای صفر است:

(۱ - ۳۵) $$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = 0$$

دیورژانس هر تاو برابر صفر است:

(۱ - ۳۶) $$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = 0$$

دو عملیات ممکن مرتبه دوم دیگر عبارتند از: تاو تاو و گرادیان دیورژانس یک میدان برداری:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})-\nabla^2\vec{F}$$

لاپلاسی هر بردار، برداری است که مولفه قائم آن لاپلاسهای مولفه‌های قائم بردار اصلی هستند.

مسائل فصل اول

۱ - ۱ - بردارهای زیر از مبدأ مختصات تا نقاط D, C, B, A داده شده‌اند:

$$\vec{A} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k} \qquad \vec{C} = 3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$$
$$\vec{B} = 2\hat{i}+3\hat{j} \qquad \vec{D} = \hat{k}-\hat{j}$$

نشان دهید که خطوط $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ موازی‌اند و نسبت طول آنها را پیدا کنید.

حل: برای اینکه نشان دهیم این دو خط موازی هستند، کافی است که نشان دهیم این دو بردار مضربی از یکدیگر هستند و یا نشان دهیم که ضرب خارجی آن‌ها صفر است.

$$\overline{AB} = \vec{B}-\vec{A} = (2\hat{i}+3\hat{j})-(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$$
$$\overline{CD} = \vec{D}-\vec{C} = (\hat{k}-\hat{j})-(3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}) = -3\hat{i}-6\hat{j}+3\hat{k}$$

در نتیجه

$$\overline{CD} = -3\overline{AB} \quad\Rightarrow\quad \overline{CD}\parallel\overline{AB}$$

و یا

$$\overline{AB}\times\overline{CD} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

برای بدست آوردن نسبت طول دو خط در این روش:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{6} \quad ,$$
$$\left|\overline{CD}\right| = \sqrt{(-3)^2+(-6)^2+(3)^2} = \sqrt{54}$$

در نتیجه:

$$\frac{\left|\overline{CD}\right|}{\left|\overline{AB}\right|} = 3$$

۱ - ۲ - ثابت کنید که بردارهای زیر بر هم عمودند:

$$\vec{A} = \hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k} \quad , \quad \vec{B} = 4\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$$

حل: اگر ضرب داخلی $(\vec{A}\cdot\vec{B})$ دو بردار صفر باشد در صورتیکه اندازه هیچکدام از آنها صفر نباشد، می‌توان نتیجه گرفت که این دو بردار بر هم عمود هستند.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \;,\; \left|\vec{A}\right|\neq 0 \;,\; \left|\vec{B}\right|\neq 0 \Rightarrow \vec{A}\perp\vec{B}$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})\cdot(4\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}) = 4+8-12 = 0$$
$$\Rightarrow \vec{A}\perp\vec{B}$$

۱ - ۳ - نشان دهید که بردارهای زیر اضلاع یک مثلث قائم الزاویه هستند:

$$\vec{A} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k} \;,\; \vec{B} = \hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k} \;,\; \vec{C} = 3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$$

حل: اگر مجذور یکی از بردارها با مجموع مجذورات دو بردار دیگر برابر باشد و دو بردار از این سه بردار بر یکدیگر عمود باشند آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که این سه بردار تشکیل یک مثلث قائم الزاویه می‌دهند.

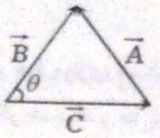
Physicsclass.blogsky.com

$$|\vec{A}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}$$
$$|\vec{B}|=\sqrt{1^2+(-3)^2+(-5)^2}=\sqrt{35} \Rightarrow |\vec{C}|=|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2$$
$$|\vec{C}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$$
$$\vec{A}.\vec{B}=(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})\cdot(\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k})=0$$

بنابراین مثلث ABC یک مثلث قائم الزاویه است.

۱ - ۴ - با به توان دو رساندن طرفین معادله $\vec{A}=\vec{B}-\vec{C}$ و تفسیر هندسی نتیجه حاصل «قانون کسینوسها» را ثابت کنید

حل:



$$\vec{A}=\vec{B}-\vec{C} \Rightarrow (\vec{A})^2=(\vec{B}-\vec{C})^2$$
$$|\vec{A}|^2=|\vec{B}|^2+|\vec{C}|^2-2\vec{B}\cdot\vec{C}=|\vec{B}|^2+|\vec{C}|^2-2|\vec{B}||\vec{C}|\cos\theta$$

۱ - ۵ - الف) نشان دهید که:

$$\vec{A}=\hat{i}\cos\alpha+\hat{j}\sin\alpha, \qquad \vec{B}=\hat{i}\cos\beta+\hat{j}\sin\beta$$

بردارهای یکه‌ای هستند که در صفحه xy قرار دارند و با محور x زوایای α و β می‌سازند.

ب) به کمک ضرب نرده‌ای فرمول مثلثاتی $\cos(\alpha-\beta)$ را به دست آورید.

حل: الف)

$$|\vec{A}|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1 \quad , \quad |\vec{B}|=\sqrt{\cos^2\beta+\sin^2\beta}=1$$

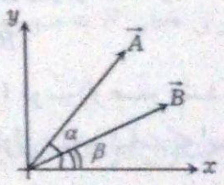
اگر θ زاویه بین بردار $\vec{A}$ و محور x ها باشد:

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{Ay}{Ax}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=\tan^{-1}(\tan\alpha)=\alpha$$

اگر θ زاویه بین بردار $\vec{B}$ و محور x ها باشد:

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{By}{Bx}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)=\tan^{-1}(\tan\beta)=\beta$$

بنابراین:



ب)

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\alpha-\beta) \qquad (1)$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(\hat{i}\cos\alpha+\hat{j}\sin\alpha)\cdot(\hat{i}\cos\beta+\hat{j}\sin\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

از مقایسه (۱) و (۲) می‌توان فرمول مثلثاتی $\cos(\alpha-\beta)$ را به صورت زیر نوشت:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

۱ - ۶ - اگر $\vec{A}$ برداری ثابت و $\vec{r}$ برداری از مبداء مختصات تا نقطه (x,y,z) باشد، نشان دهید که رابطه زیر، معادله یک صفحه است

$$(\vec{r}-\vec{A}).\vec{A}=0$$

حل: می‌دانیم که معادله کلی یک صفحه به صورت $ax+by+cz=d$ بیان می‌شود، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}(\vec{r}-\vec{A}).\vec{A}=0\\ \vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\\ \vec{A}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \{(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})-(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\}\cdot(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})=0$$
$$\{(x-a_x)\hat{i}+(y-a_y)\hat{j}+(z-a_z)\hat{k}\}\cdot(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})=0$$

بنابراین:

$$a_x x+a_y y+a_z z=a_x^2+a_y^2+a_z^2=d \qquad \text{(معادله یک صفحه)}$$

۱ - ۷ - با تعریفی که از $\vec{A}$ و $\vec{r}$ در مسئله (۱ - ۶) داده شد، ثابت کنید که رابطه زیر معادله یک کره است.

$$(\vec{r}-\vec{A})\cdot\vec{r}=0$$

حل: می‌دانیم که معادله کلی کره‌ای به شعاع R و به مرکز (a,b,c) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

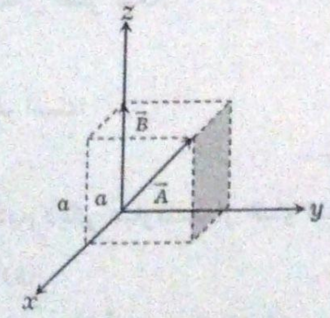
بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}(\vec{r}-\vec{A})\cdot\vec{r}=0\\ \vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\\ \vec{A}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \{(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})-(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\}\cdot(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})=0$$
$$\{(x-a_x)\hat{i}+(y-a_y)\hat{j}+(z-a_z)\hat{k}\}\cdot(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})=0$$
$$x^2+a_x x+y^2-a_y y+z^2-a_z z=0$$
$$\left(x-\frac{a_x}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a_y}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a_z}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(a_x^2+a_y^2+a_z^2)=R^2$$

این معادله، معادله کره‌ای به مرکز $\left(\frac{a_x}{2},\frac{a_y}{2},\frac{a_z}{2}\right)$ و به شعاع $\frac{1}{2}(a_x^2+a_y^2+a_z^2)^{\frac{1}{2}}$ است.

۱ - ۸ - با استفاده از ضرب نرده‌ای، کسینوس زاویه میان قطر حجمی مکعب با یکی از اضلاع را پیدا کنید.

حل:



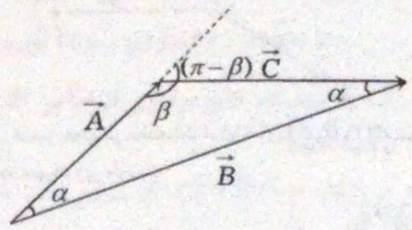
$$\vec{A}\ \text{(بردار متناظر با قطر حجمی مکعب)}=a\hat{i}+a\hat{j}+a\hat{k}$$
$$\vec{B}\ \text{(بردار متناظر با یکی اضلاع مکعب)}=a\hat{k}$$
$$\left.\begin{array}{l}\vec{A}\cdot\vec{B}=a^2\\ |\vec{A}|=\sqrt{3}a, |\vec{B}|=a\end{array}\right\} \Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=\frac{a^2}{\sqrt{3}a^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Physicsclass.blogsky.com

$$\Rightarrow \quad \theta \cong 55^\circ$$

۱-۹- با استفاده از ضرب برداری با $\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}$، قانون سینوسها را در مثلث ثابت کنید.

حل:



معادله $\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}$ را به ترتیب در $\vec{A}$، $\vec{C},\vec{B}$ ضرب خارجی می‌کنیم، بنابراین:

$$\vec{A}\times(\vec{A}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B} \quad\Rightarrow\quad \vec{A}\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{A}||\vec{C}|\sin(\pi-\beta)=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\gamma$$

$$|\vec{A}||\vec{C}|\sin\beta=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\gamma \qquad (1)$$

$$\vec{B}\times(\vec{A}+\vec{C})=\vec{B}\times\vec{B} \quad\Rightarrow\quad \vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}\times\vec{B}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{A}||\vec{B}|\sin\gamma=|\vec{C}||\vec{B}|\sin\alpha \qquad (2)$$

$$\vec{C}\times(\vec{A}+\vec{C})=\vec{C}\times\vec{B} \quad\Rightarrow\quad \vec{C}\times\vec{A}=\vec{C}\times\vec{B}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{C}||\vec{A}|\sin(\pi-\beta)=|\vec{C}||\vec{B}|\sin\alpha$$

$$|\vec{C}||\vec{A}|\sin\beta=|\vec{C}||\vec{B}|\sin\alpha \qquad (3)$$

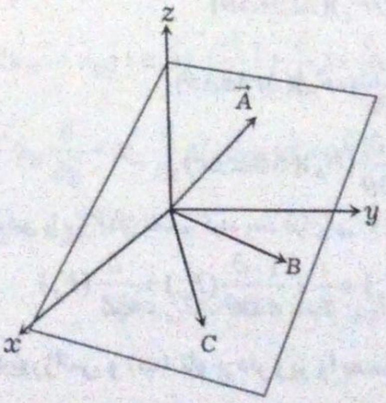
اگر روابط (۱)و(۲)و(۳) را بر $|\vec{A}||\vec{B}||\vec{C}|$ تقسیم کنیم، داریم:

$$\left.\begin{aligned}(1) &\Rightarrow \frac{\sin\beta}{|\vec{B}|}=\frac{\sin\gamma}{|\vec{C}|}\\ (2) &\Rightarrow \frac{\sin\gamma}{|\vec{C}|}=\frac{\sin\alpha}{|\vec{A}|}\\ (3) &\Rightarrow \frac{\sin\beta}{|\vec{B}|}=\frac{\sin\alpha}{|\vec{A}|}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{|\vec{A}|}=\frac{\sin\beta}{|\vec{B}|}=\frac{\sin\gamma}{|\vec{C}|}$$

۱-۱۰- اگر $\vec{A}$، $\vec{B}$، $\vec{C}$ بردارهایی از مبدأ مختصات تا نقاط C,B,A باشند، نشان دهید که بردار زیر بر صفحه ABC عمود است.

$$(\vec{A}\times\vec{B})+(\vec{B}\times\vec{C})+(\vec{C}\times\vec{A})$$

حل:



در واقع باید ثابت کنیم که این بردار بر سه بردار $\vec{A}-\vec{B}$، $\vec{B}-\vec{C}$ و $\vec{A}-\vec{C}$ که در صفحه ABC واقع هستند، عمود است، بنابراین:

$$(\vec{A}-\vec{B})\cdot\{(\vec{A}\times\vec{B})+(\vec{B}\times\vec{C})+(\vec{C}\times\vec{A})\}$$

$$=\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})+\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})+\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

$$-\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})-\vec{B}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})-\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

$$=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})-\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$$

چون:

$$-\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=-\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$$

$$(\vec{B}-\vec{C})\cdot\{(\vec{A}\times\vec{B})+(\vec{B}\times\vec{C})+(\vec{C}\times\vec{A})\}$$

$$=\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})+\vec{B}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})+\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

$$-\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})-\vec{C}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})-\vec{C}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

$$=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})-\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})-\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=0$$

$$(\vec{A}-\vec{C})\cdot\{(\vec{A}\times\vec{B})+(\vec{B}\times\vec{C})+(\vec{C}\times\vec{A})\}$$

$$=\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})+\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})+\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

$$-\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})-\vec{C}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})-\vec{C}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

$$=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\times\vec{B})=0=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})-\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=0$$

۱-۱۱- با جانشانی مستقیم ثابت کنید که معادله (۱-۱۵) پاسخ معادله (۱-۱۴) است (توجه کنید که معادله (۱-۱۴) مستلزم عمود بودن $\vec{C}$ بر $\vec{A}$ است.)

حل: معادله (۱-۱۴) $\quad \vec{C}=\vec{A}\times\vec{X}$

معادله (۱-۱۵) $\quad \vec{X}=\dfrac{\vec{C}\times\vec{A}}{\vec{A}\cdot\vec{A}}+K\vec{A}$

$$\vec{A}\times\vec{X}=\vec{A}\times\left[\frac{\vec{C}\times\vec{A}}{\vec{A}\cdot\vec{A}}+K\vec{A}\right]=\frac{\vec{A}\times(\vec{C}\times\vec{A})}{A^2}+K\vec{A}\times\vec{A}$$

می‌دانیم که:

$$\vec{A}\times\vec{A}=0 \quad , \quad \vec{A}\perp\vec{C} \quad\Rightarrow\quad \vec{A}.\vec{C}=0$$

و از قاعده بک کب داریم:

$$\vec{A}\times(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}A^2-\vec{A}(\vec{A}\cdot\vec{C})=A^2\vec{C}$$

بنابراین:

$$\vec{A}\times\vec{X}=\frac{A^2\vec{C}}{A^2}=\vec{C}$$

۱-۱۲- (الف) ثابت کنید هرگاه $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=0$ باشد بردارهای $\vec{A}$، $\vec{C},\vec{B}$ نسبت به هم استقلال خطی ندارند.

ب) آیا بردارهای زیر به طور خطی از یکدیگر مستقل‌اند؟

$$\vec{A}=\hat{j}+3\hat{k} \quad , \quad \vec{B}=\hat{i}-2\hat{k} \quad , \quad \vec{C}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$$

حل: (الف)

$$\left.\begin{aligned}&\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0 \;\Rightarrow\; \vec{A}\perp(\vec{B}\times\vec{C})\\ &(\vec{B}\times\vec{C})\perp\vec{B},\vec{C}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

این سه بردار در یک صفحه قرار دارند.

بنابراین می‌توان هر یک از این سه بردار را به صورت مجموع دوتای دیگر نوشت، در واقع این سه بردار مستقل خطی هستند.

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

بنابر قسمت (الف) این سه بردار وابسته خطی هستند.

Physicsclass.blogsky.com

۱-۱۳- (الف) نشان دهید که برداریکه عمود بر سطح $\varphi(r)=const$ عبارت است از:

$$\hat{n}=\frac{\vec{\nabla}\varphi}{|\vec{\nabla}\varphi|}$$

(ب) برای بیضیوار زیر $\hat{n}$ را پیدا کنید.

$$\varphi=ax^2+by^2+cz^2$$

حل: الف)

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(r)=\text{const}\Rightarrow d\varphi(r)=0\\ d\varphi(r)=\vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{s}\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{s}=0\Rightarrow\vec{\nabla}\varphi\perp d\vec{s}$$

$d\vec{s}$ برداری بر روی سطح $\varphi(r)$ است، بنابراین $\vec{\nabla}\varphi$ و برداریکه $\hat{n}=\frac{\vec{\nabla}\varphi}{|\vec{\nabla}\varphi|}$ بر سطح $\varphi(r)=c$ عمود هستند.

ب)

$$\vec{\nabla}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}=2ax\hat{i}+2by\hat{j}+2cz\hat{k}$$

$$|\vec{\nabla}\varphi|=\sqrt{4a^2x^2+4b^2y^2+4c^2z^2}$$

بنابراین:

$$\hat{n}=\frac{\vec{\nabla}\varphi}{|\vec{\nabla}\varphi|}=\frac{2ax\hat{i}+2by\hat{j}+2cz\hat{k}}{2\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}$$

$$=\frac{ax\hat{i}+by\hat{j}+cz\hat{k}}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}$$

۱-۱۴- گرادیان φ را در مختصات استوانه‌ای، با توجه به رابطه $d\vec{s}=dr\hat{a}_r+rd\theta\hat{a}_\theta+dz\hat{k}$ پیدا کنید. باید توجه داشت که معانی r,θ در اینجا با آنچه در معادله (۱-۲۱) و (۱-۲۲) آمده است، متفاوت‌اند. در مختصات کروی r بزرگی بردار شعاعی از مبداء و θ زاویه قطبی است. در مختصات استوانه‌ای r فاصله عمودی از محور استوانه و θ زاویه سمتی حول این محور است.

حل: می‌دانیم که:

$$d\varphi=\vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{s}\quad,\quad d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}dr+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

$$d\vec{s}=dr\hat{a}_r+rd\theta\hat{a}_\theta+dz\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\varphi=(\vec{\nabla}\varphi)_r\hat{a}_r+(\vec{\nabla}\varphi)_\theta\hat{a}_\theta+(\vec{\nabla}\varphi)_z\hat{a}_z$$

با جایگذاری روابط بالا در رابطه $d\varphi=\vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{s}$ داریم:

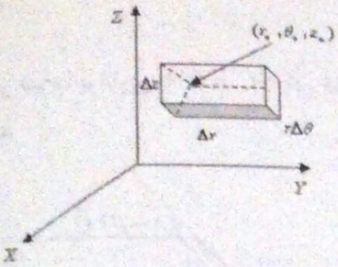
$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}dr+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=(\vec{\nabla}\varphi)_r dr+(\vec{\nabla}\varphi)_\theta rd\theta+(\vec{\nabla}\varphi)_z dz$$

بنابراین:

$$\vec{\nabla}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{a}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{a}_\theta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{a}_z$$

۱-۱۵- با استفاده از تعریف دیورژانس رابطه‌ای برای $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ در مختصات استوانه‌ای به دست آوریم.

حل:



با توجه به شکل برای عنصر حجم در مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) که شش وجهی است بردارهای سطوح آنرا به صورت زیر داریم:

$$\Delta\vec{a}_1=r\Delta r\Delta\theta\hat{z}$$
$$\Delta\vec{a}_2=-\Delta\vec{a}_1$$
$$\Delta\vec{a}_3=r\Delta Z\Delta\theta\hat{r}$$
$$\Delta\vec{a}_4=-\Delta\vec{a}_3$$
$$\Delta\vec{a}_5=\Delta Z\Delta r\hat{\theta}$$
$$\Delta\vec{a}_6=-\Delta\vec{a}_5$$

$$divF=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint\vec{F}.\hat{n}da\qquad\Delta V=r\Delta r\Delta\theta\Delta z$$

$$\oint\vec{F}.\hat{n}da=\left[\int\cdots\int\right]\vec{F}.\hat{n}da=F_z(r_\circ,\theta_\circ,z_\circ)(-\Delta a_1)$$
$$+F_z(r_\circ,\theta_\circ,z_\circ+\Delta z)(\Delta a_1)$$
$$+F_r(r_\circ+\Delta r,\theta_\circ,z_\circ)(\Delta a_3)$$
$$+F_r(r_\circ,\theta_\circ,z_\circ)(-\Delta a_3)$$
$$+F_\theta(r_\circ,\theta_\circ,z_\circ)(\Delta a_5)$$
$$+F_\theta(r_\circ,\theta_\circ-\Delta\theta,z_\circ)(-\Delta a_5)$$

حال ضریب حاصل ضربهای بازه های مختصات را با استفاده از بسط تیلور بسط می دهیم (مثلاً در جمله سوم که بصورت $F_r(r_\circ+\Delta r,\theta_\circ,Z_\circ)(r\Delta z\Delta\theta)$ می باشد باید عامل $rF_r(r_\circ+\Delta r,\theta_\circ,Z_\circ)$ بسط داده شود. تنها سه جمله (دوم، سوم وششم) نیاز به بسط دارند:

$$\begin{cases}rF_z(r_0,\theta_0,z_0+\Delta z)=rf_z+(\frac{\partial rf_z}{\partial z})\Delta z\\ rFz(r_0+\Delta r,\theta_0,z_0)=rf_z+(\frac{\partial(rf_r)}{\partial r})\Delta r\\ F\theta(r_0,\theta_0-\Delta\theta,z_0)=f_\theta+(\frac{\partial f_\theta}{\partial\theta})(-\Delta\theta)\end{cases}$$

پس از جایگذاری داریم:

$$\oint F.\hat{n}\,da=\frac{\partial}{\partial z}(rF_z)(\Delta z\Delta r\Delta\theta)$$
$$+\frac{\partial}{\partial r}(rF_r)(\Delta r\Delta z\Delta\theta)$$
$$+\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta)(\Delta\theta\Delta z\Delta r)$$

اگر در رابطه اخیر طرفین را بر ΔV تقسیم کرده وحد آنرا برای $\Delta V\to 0$ بگیریم داریم:

$$\vec{\nabla}.\vec{F}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r)+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta)+\frac{\partial}{\partial Z}(F_z)$$

۱-۱۶- (الف) دیورژانس و (ب) تاو بردار زیر را بدست آورید.

$$\hat{i}(x^2+yz)+\hat{j}(y^2+zx)+\hat{k}(z^2+xy)$$

حل: الف)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\partial Ax}{\partial x}+\frac{\partial Ay}{\partial y}+\frac{\partial Az}{\partial z}=2x+2y+2z=2(x+y+z)$$

ب)

Physicsclass.blogsky.com

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ (x^{2}+yz) & (y^{2}+zx) & (z^{2}+xy)\end{vmatrix}$$

$$=(x-x)\hat{i}+(y-y)\hat{j}+(z-z)\hat{k}=0$$

۱ – ۱۷ – آیا $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ برای هر تابع برداری الزاماً بر F عمود است؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

حل: خیر، چون در رابطه $\vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})=0$ ممکن است $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ باشد. بنابراین لزوماً $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ بر $\vec{F}$ عمود نیست.

۱ – ۱۸ – برای دو تابع نرده‌ای φ و Ψ ثابت کنید که:

$$\nabla^{2}(\varphi\psi)=\varphi\nabla^{2}\psi+\psi\nabla^{2}\varphi+2\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\varphi$$

حل:

$$\vec{\nabla}(\varphi\psi)=(\vec{\nabla}\varphi)\psi+\varphi(\vec{\nabla}\psi)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}(\varphi\psi)=\vec{\nabla}\cdot\left\{(\vec{\nabla}\varphi)\psi+\varphi(\vec{\nabla}\psi)\right\}$$

$$\Rightarrow\nabla^{2}(\varphi\psi)=\psi\nabla^{2}\varphi+\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi+\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi+\varphi\nabla^{2}\psi$$

$$=\psi\nabla^{2}\varphi+\varphi\nabla^{2}\psi+2\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi$$

۱ – ۱۹ – اگر $\vec{r}$ بردار از مبداء مختصات تا نقطه (x,y,z) باشد، روابط زیر را ثابت کنید.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3\quad,\quad\vec{\nabla}\times\vec{r}=0\quad,\quad(u\cdot\vec{\nabla})r=u$$

(توجه: $\vec{u}$ می‌تواند هر برداری باشد.)

حل:

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

$$\Rightarrow\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})$$

$$=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=0$$

$$\vec{u}=u_x\hat{i}+u_y\hat{j}+u_z\hat{k}$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{r}=\left\{(u_x\hat{i}+u_y\hat{j}+u_z\hat{k})\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\right\}(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})$$

$$=\left(u_x\frac{\partial}{\partial x}+u_y\frac{\partial}{\partial y}+u_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})$$

$$=u_x\hat{i}+u_y\hat{j}+u_z\hat{k}=\vec{u}$$

۱ – ۲۰ – اگر $\vec{A}$ برداری ثابت باشد نشان دهید

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{r})=\vec{A}$$

$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}\quad,\quad\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{r})=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left\{(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\cdot(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\right\}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(A_x x+A_y y+A_z z)$$

$$=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}=\vec{A}$$

و همچنین می‌توان با استفاده از رابطه (۱ – ۵۴) کتاب به چنین نتیجه‌ای رسید:

رابطه (۱-۵۴) : $\varphi(\vec{A}\cdot\vec{r})$ یا $\vec{F}(\vec{A}\cdot\vec{r}):\vec{\nabla}=\vec{A}\dfrac{d}{d(\vec{A}\cdot\vec{r})}$

بنابراین:

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{r})=\vec{A}\frac{d}{d(\vec{A}\cdot\vec{r})}(\vec{A}\cdot\vec{r})=\vec{A}$$

۱ – ۲۱ – اتحادهای (۷ – ۱ – ۱) و (۹ – ۱ – ۱) از جدول ۱ – ۱ را ثابت کنید.

حل:

(۷ – ۱ – ۱) $\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{F})=\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{F}+\varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\quad,\quad\vec{F}=F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{F})=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot(\varphi F_x\hat{i}+\varphi F_y\hat{j}+\varphi F_z\hat{k})$$

$$=\frac{\partial(\varphi F_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\varphi F_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\varphi F_z)}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial x}F_x+\varphi\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}F_y+\varphi\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}F_z+\varphi\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}F_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}F_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}F_z\right)+\varphi\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)$$

$$=\vec{\nabla}\varphi\cdot F+\varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$$

(۹ – ۱ – ۱) $\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{F})=(\vec{\nabla}\varphi)\times\vec{F}+\varphi\vec{\nabla}\times\vec{F}$

$$\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{F})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \varphi F_x & \varphi F_y & \varphi F_z\end{vmatrix}=$$

$$=\hat{i}\left(\frac{\partial(\varphi F_z)}{\partial y}-\frac{\partial(\varphi F_y)}{\partial z}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial(\varphi F_x)}{\partial z}-\frac{\partial(\varphi F_z)}{\partial x}\right)$$

$$+\hat{k}\left(\frac{\partial(\varphi F_y)}{\partial x}-\frac{\partial(\varphi F_x)}{\partial y}\right)$$

$$=\hat{i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}F_z+\varphi\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}F_y-\varphi\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)$$

$$+\hat{j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}F_x+\varphi\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}F_z-\varphi\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)$$

$$+\hat{k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}F_y+\varphi\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}F_x-\varphi\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$=\varphi\left\{\hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k}\right\}$$

$$+\left\{\hat{i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}F_z-\frac{\partial\varphi}{\partial z}F_y\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}F_x-\frac{\partial\varphi}{\partial x}F_z\right)\right.$$

Physicsclass.blogsky.com

$$+\hat{k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}F_y-\frac{\partial\varphi}{\partial y}F_x\right)\Bigg\}=\varphi\vec{\nabla}\times\vec{F}+\vec{\nabla}\varphi\times\vec{F}$$

۱ - ۲۲ - اگر r بزرگی بردار از مبداء تا نقطه (x,y,z)، و $f(r)$ یک تابع اختیاری بر حسب r باشد. ثابت کنید که

$$\vec{\nabla}f(r)=\frac{\vec{r}}{r}\frac{df}{dr}\quad,\quad\vec{\nabla}\times[f(r)\vec{r}]=0$$

حل: $\vec{\nabla}f(r)$ در مختصات دکارتی به صورت زیر است:

$$\vec{\nabla}f(r)=\frac{\partial f(r)}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f(r)}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial f(r)}{\partial z}\hat{k}$$
$$=\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\hat{k}$$
$$=\frac{x}{r}\frac{df(r)}{dr}\hat{i}+\frac{y}{r}\frac{df(r)}{dr}\hat{j}+\frac{z}{r}\frac{df(r)}{dr}\hat{k}$$
$$=\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})=\frac{\vec{r}}{r}\frac{df(r)}{dr}$$

با استفاده از این نتیجه برای رابطه زیر داریم:

$$\vec{\nabla}\times[f(r)\vec{r}]=\vec{\nabla}f(r)\times\vec{r}+f(r)\vec{\nabla}\times\vec{r}$$
$$=\frac{\vec{r}}{r}\frac{df(r)}{dr}\times\vec{r}+f(r)\vec{\nabla}\times\vec{r}$$
$$=\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}\vec{r}\times\vec{r}+f(r)\;\vec{\nabla}\times\vec{r}=0+0=0$$

۱ - ۲۳ - ثابت کنید که

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(r)=\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{d\vec{F}}{dr}$$

حل:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(r)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot(F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k})$$
$$=\frac{\partial F_x}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial F_y}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\hat{k}$$
$$=\frac{\partial F_x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial F_y}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial F_z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\hat{k}$$
$$=\frac{x}{r}\frac{\partial F_x}{\partial r}\hat{i}+\frac{y}{r}\frac{\partial F_y}{\partial r}\hat{j}+\frac{z}{r}\frac{\partial F_z}{\partial r}\hat{k}$$
$$=\frac{1}{r}(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot\left(\frac{dF_x}{dr}\hat{i}+\frac{dF_y}{dr}\hat{j}+\frac{dF_z}{dr}\hat{k}\right)=\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{d\vec{F}}{dr}$$

۱ - ۲۴ - ثابت کنید که اگر $\xi=\vec{A}\cdot\vec{r}$ باشد، داریم

$$\vec{\nabla}\varphi(\xi)=\vec{A}\frac{d\varphi}{d\xi}$$

حل:

$$\vec{\nabla}\varphi(\xi)=\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial z}\hat{k}$$
$$=\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}\hat{k}$$

طبق صورت مسئله:

$$\xi=\vec{A}\cdot\vec{r}=A_x x+A_y y+A_z z$$

بنابراین:

$$\vec{\nabla}\varphi(\xi)=\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}A_x\hat{i}+\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}A_y\hat{j}+\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}A_z\hat{k}$$
$$=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}$$

۱ - ۲۵ - صحت معادله (۱ - ۵۱) را در مختصات قائم تحقیق کنید. در این مختصات $\nabla^2\vec{F}$ به صورتی است که در متن کتاب تعریف شده است.

حل:

رابطه (۱ - ۵۱): $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})-\nabla^2\vec{F}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ F_x&F_y&F_z\end{vmatrix}$$
$$=\hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F})=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)&\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)&\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\right]$$
$$+\hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\right]$$
$$+\hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\right]$$

$$=\hat{i}\left(\frac{\partial^2F_y}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2F_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2F_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2F_z}{\partial z\partial x}\right)$$
$$+\hat{j}\left(\frac{\partial^2F_z}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2F_y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2F_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F_x}{\partial x\partial y}\right)$$
$$+\hat{k}\left(\frac{\partial^2F_x}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2F_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2F_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F_y}{\partial y\partial z}\right)$$

$$=\hat{i}\left(-\frac{\partial^2F_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2F_x}{\partial z^2}\right)+\hat{j}\left(-\frac{\partial^2F_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2F_y}{\partial z^2}\right)+\hat{k}\left(-\frac{\partial^2F_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2F_z}{\partial y^2}\right)$$
$$+\hat{i}\left(\frac{\partial^2F_y}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2F_z}{\partial z\partial x}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial^2F_z}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2F_x}{\partial x\partial y}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial^2F_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2F_y}{\partial y\partial z}\right)$$

$$=\hat{i}\left(-\frac{\partial^2F_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2F_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2F_x}{\partial z^2}\right)+\hat{j}\left(-\frac{\partial^2F_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2F_y}{\partial y^2}-\frac{\partial^2F_y}{\partial z^2}\right)$$
$$+\hat{k}\left(-\frac{\partial^2F_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2F_z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2F_z}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial^2F_x}{\partial x^2}\hat{i}+\frac{\partial^2F_y}{\partial y^2}\hat{j}+\frac{\partial^2F_z}{\partial z^2}\hat{k}$$
$$+\hat{i}\left(\frac{\partial^2F_y}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2F_z}{\partial z\partial x}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial^2F_z}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2F_x}{\partial x\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial^2F_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2F_y}{\partial y\partial z}\right)$$

Physicsclass.blogsky.com

$$=-(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial z^2})(F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k})$$

$$+\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z})$$

$$+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z})+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z})$$

$$=-(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial z^2})(F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k})$$

$$+(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k})(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z})=-\nabla^2\vec{F}+\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})$$

۱ – ۲۶ - اتحادهای (۱-۲-۲) و (۱-۲-۴) در جدول ۱-۲ را ثابت کنید.

(راهنمایی: از قضیه دیورژانس و یک یا چند اتحاد از جدول ۱-۱ استفاده کنید.)

حل:

اتحاد (۱ – ۲-۲) : $\int_V \vec{\nabla}\varphi\, dV=\oint_S \varphi\hat{n}\, da$

قضیه دیورژانس را برای بردار $\vec{F}=\varphi\vec{G}$ (G بردار ثابت) بکار می‌بریم:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV=\oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\, da\ ,\ \vec{F}=\varphi\vec{G}$$

$$\Rightarrow \int_V \vec{\nabla}\cdot\varphi\vec{G}\, dV=\oint_S \varphi\vec{G}\cdot\hat{n}\, da$$

$$\vec{\nabla}\cdot\varphi\vec{G}=\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{G}+\varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{G}=\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{G}+0=\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{G}$$

بنابراین:

$$\int_V \vec{G}.\vec{\nabla}\varphi\, dv=\oint_S \varphi\vec{G}.\hat{n}\, da$$

$$\int_V \vec{G}\cdot\vec{\nabla}\varphi\ dV-\oint_S \vec{G}\cdot\varphi\hat{n}\ da=0$$

چون $\vec{G}$ برداری ثابت است بنابراین می‌توان آنرا از زیر انتگرال بیرون آورد:

$$G\cdot\left[\int_V \vec{\nabla}\varphi\, dV-\oint_S \varphi\hat{n}\, da\right]=0 \Rightarrow \int_V \vec{\nabla}\varphi\, dV=\oint_S \varphi\hat{n}\, da$$

برای اثبات اتحاد (۱-۲-۴) به صورت مؤلفه‌ای عمل می‌کنیم، برای مؤلفه x داریم:

$$\int(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\cdot\vec{G}\cdot\vec{\nabla})\ F_x\ dV=\oint_S F_x(\vec{G}\cdot\hat{n})da$$

با استفاده از قضیه دیورژانس برای بردار $F_x\vec{G}$ داریم:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot F_x\vec{G}\ dV=\oint_S F_x\vec{G}\cdot\hat{n}\ da$$

$$\vec{\nabla}\cdot F_x\vec{G}=\vec{G}\cdot\vec{\nabla}F_x+F_x\vec{\nabla}\cdot\vec{G}$$

بنابراین:

$$\int_V(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}F_x+F_x\vec{\nabla}\cdot\vec{G})dV=\oint_S F_x\ \vec{G}\cdot\hat{n}\ da$$

$$\int_V(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}+\vec{\nabla}\cdot\vec{G})F_x\ dV=\oint_S F_x(\vec{G}\cdot\hat{n})da$$

به همین ترتیب برای مؤلفه‌های دیگر هم بدست می‌آید و با جمع آنها رابطه (۱ – ۲ – ۴) اثبات می‌شود.

راستی تاکنون در آینه ژرف (چرا و چگونه) خود را نگاه کرده‌ای و پرسیده‌ای جایگاه من در زندگی کجاست؟

معطّل نکن! همین الان جایگاه خودت را تعیین کن، ببین چه کاره‌ای؟

تاکنون از خودت سئوال کرده‌ای: که تو به زندگی بدهکاری یا زندگی به تو؟

تاکنون آرزوها و هدف‌هایت را فهرست کرده‌ای؟ اگر نه! همین الان هدف‌هایت را بنویس و برای حصول هر کدام تاریخی بگذار!

باور کن! اگر از زندگی چیزی نخواهی، چیزی بدست نخواهی آورد!

تاکنون برای رسیدن به هدف‌هایت چه قدر تلاش کرده‌ای؟

فراموش مکن! همه این حرف‌ها برای این است که تو فقط یک ذره خودت را تکان بدهی! پس، بلند شو! معطّل نکن که زمان می‌گذرد!

یک بار دیگر به سه راهی که در پیش پایت نهاده شده، نگاه کن!

پلیدی، پاکی، پوچی، تو، کدام راه را انتخاب می‌کنی؟

به یاد داشته باش! تو معمار زندگی خودت هستی، پس شکست‌هایت را گردن کسی نینداز!

جایگاه ما در زندگی یعنی، تجسّم عینی آرزوها و رؤیاهایمان!

زندگی

زندگی یعنی، چکیدن همچو شمع
از گرمی عشق
زندگی یعنی، لطافت، گم شدن
در معنی عشق
زندگی یعنی، دویدن بی امان
در وادی عشق
رفتن و آخر رسیدن بر در
آبادی عشق
می‌توان هر لحظه، هر جا
عاشق و دلداده بودن.
پر غرور چون آبشاران
بودن امّا
ساده بودن.
می‌شود اندوه شب را
از نگاه صبح فهمید
یا به وقت ریزش اشک
شادی بگذشته را دید
می‌توان در گریه‌ی ابر
با خیال غنچه خوش بود
زایش آینده را در
هر خزانی دید و آزمود!

Physicsclass.blogsky.com

۲

الکتروستاتیک

بار الکتریکی

بار یکی از خواص اساسی و سرشتی ذره‌های میکروسکوپی سازنده ماده است. گرچه در مقیاس میکروسکوپی ماده از تعداد بسیار زیادی ذره باردار درست شده است، ولی در مشاهدات ماکروسکوپی بدلیل وجود مقدار تقریباً مساوی دو نوع بار مثبت و منفی، نیروی الکتریکی قوی وابسته به این ذرات باردار کاملاً از نظر پنهان است. مشاهدات تجربی نشان می‌دهند که بار نه وجود می‌آید و نه نابود می‌شود، در واقع بار کل دستگاه بسته تغییر نمی کند.

قانون کولن

قانون کولن را می‌توان در سه حکم زیر خلاصه کرد:

۱ - دو نوع و فقط دو نوع بارالکتریکی وجود دارد که به بارهای مثبت و منفی معروف‌اند.

۲ - دو بار نقطه‌ای نیروهایی بر یکدیگر وارد می‌کنند. خط اثر این نیروها در امتداد خطی واقع است که آن دوبار را به هم وصل می‌کند و بزرگی این نیروها با عکس مجذور فاصله آنها متناسب است.

۳ - این نیروها که با حاصل ضرب بارها متناسب‌اند، برای بارهای همنام دافعه، و برای بارهای ناهمنام جاذبه هستند.

$$\vec{F}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\,\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \qquad (۱-۲)$$

که ثابت ε_0 گذردهی خلاء نام دارد و مقدار عددی آن در دستگاه یکاهای mks برابر است با $8/854\times10^{-12}\ \frac{c^2}{N\cdot m^2}$ و در دستگاه گاوسی برابر $\frac{1}{4\pi}$ است.

همچنین قانون کولن را می‌توان به دستگاههایی که چندین بار نقطه‌ای دارند، یا به توزیع پیوسته‌ای از بار تعمیم داد:

برای دستگاهی شامل N بار، نیروی وارد بر بار i ام از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\vec{F}_i=q_i\sum_{j\neq i}^{N}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \qquad \vec{r}_{ij}=\vec{r}_i-\vec{r}_j \qquad (۲-۲)$$

نیروی وارد از طرف توزیع بار پیوسته با چگالی حجمی ρ و چگالی σ، بر بار نقطه‌ای q واقع در نقطه r به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\rho=\lim_{\Delta V\to0}\frac{q}{\Delta V} \quad , \quad \sigma=\lim_{\Delta S\to0}\frac{\Delta q}{\Delta S} \qquad (۳-۲)$$

$$\vec{F}_q=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|r-r'|^3}\rho(r')dV' + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|r-\vec{r}|^3}\sigma(r')da'$$

میدان الکتریکی

میدان الکتریکی در هر نقطه برابر است با: حد نسبت نیروی وارد بر بار آزمون که در آن نقطه قرار داده شود به اندازه این بار، وقتیکه مقدار بار آزمون به سمت صفر میل کند.

$$\vec{E}=\lim_{q\to0}\frac{\vec{F}_q}{q} \qquad (۴-۲)$$

برای یک توزیع بار که شامل N بار نقطه‌ای $q_1,q_2,\ldots,q_N$ که در نقاط $r_1,r_2,\ldots,r_N$ قرار دارند و یک توزیع حجمی بار با چگالی بار $\rho(r')$ و یک توزیع سطحی بار با چگالی سطحی $\sigma(r')$، اگر بار آزمون q در نقطه r قرار داشته باشد، نیرو و میدان الکتریکی در نقطه r به صورت زیر است:

(۵-۲)

$$\vec{F}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}q_i\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\rho(r')dV' + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\sigma(r')da'$$

(۶-۲)

$$\vec{E}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}q_i\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\rho(r')dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\sigma(r')da'$$

Physicsclass.blogsky.com

برای تجسم میدان الکتریکی وابسته به یک توزیع بار خاص از مفهوم خطوط نیرو استفاده می‌شود. خط نیرو یک خط (یا یک منحنی) فرضی است که جهت آن (یا مماس بر آن) در هر نقطه معرف جهت میدان الکتریکی در آن نقطه است. این خطوط نیرو به چشمه‌های میدان الکتریکی، در واقع بارهای که میدان را تولید می‌کنند، ختم می‌شوند. یکای میدان الکتریکی نیوتن بر کولن یا ولت بر متر است.

پتانسیل الکتروستاتیکی

می‌توان نشان داد که تاو میدان الکتریکی صفر است، بنابراین یک تابع نرده‌ای وجود دارد که گرادیان آن با میدان الکتریکی برابر است.

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi(r) \qquad (۲-۷)$$

که φ تابع پتانسیل الکتروستاتیکی نامیده می‌شود.

برای میدان مفروض E، پتانسیل الکتروستاتیکی برابر است با:

$$\varphi(r)=-\int_{ref}^{r}\vec{E}(r')\cdot dr' \qquad (۲-۸)$$

که ref معرف نقطه مرجعی است که در آن مقدار φ برابر صفر است.

بنابراین پتانسیل ناشی از میدان الکتریکی معادله (۲-۶) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\bar{r}-\bar{r}_i|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_V\frac{\rho(r')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}dV'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_S\frac{\sigma(r')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}da' \qquad (۲-۹)$$

یکای پتانسیل ژول بر کولن است که نام ویژه ولت (V) را به آن داده‌اند.

رساناها و عایق‌ها:

مواد را می‌توان بر حسب رفتار الکتروستاتیکی شان به دو رده تقسیم کرد:

رسانا: موادی هستند که تعداد بسیار زیادی حامل بار (که در اکثر موارد الکترون‌اند) اساساً آزاد دارند. حتی تحت تاثیر میدان‌های الکتریکی بسیار ضعیف این حاملهای بار آنقدر حرکت می‌کنند تا به مواضعی برسند که در آنجا برآیند نیروهای وارد بر آنها صفر شود. بنابراین در شرایط ایستا، میدان الکتریکی در درون جسم رسانا صفر است و به همین دلیل پتانسیل الکتریکی در تمام نقاط درون جسم رسانا یکسان است. در واقع در شرایط ایستا، هر جسم رسانا یک ناحیه هم پتانسیل در فضا تشکیل می‌دهد.

دی الکتریک (عایق):

موادی هستند که در آنها تمام ذرات باردار به نحوی نسبتاً محکم به مولکولهای تشکیل دهنده این مواد مقید شده‌اند. هر چند در یک دی الکتریک واقعی معمولی، رسانای تقریباً 10^{20} مرتبه از رسانایی در یک رسانای خوب کمتر است. چون 10^{20} ضریب فوق العاده بزرگی است، بنابراین کافی است بگوییم که دی الکتریکها نارسانا هستند.

نیم رساناها و الکترولیتها:

خواص الکتریکی این مواد، حد فاصل میان رساناها و دی الکتریکها است. در یک میدان الکتریکی ایستا، رفتار آنها خیلی به رفتار اجسام رسانا شبیه است ولی پاسخ گذاری آنها از پاسخ رساناها کندتر است، در واقع دیرتر به حالت تعادل می‌رسند.

قانون گاؤس

رابطه میان انتگرال مؤلفهٔ عمودی میدان الکتریکی بر روی یک سطح بسته و مقدار کل بار درون این سطح به قانون گاؤس معروف است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\oint_S\vec{E}\cdot\hat{n}\,da=\frac{q}{\varepsilon_\circ} \qquad (۲-۱۰)$$

اگر این سطح بسته چندین بار نقطه‌ای $q_1,q_2,\ldots,q_N$ را در بر گیرد، قانون گاؤس به صورت زیر در می‌آید:

$$\oint_S\vec{E}\cdot\hat{n}\,da=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\sum_{i=1}^{N}q_i \qquad (۲-۱۱)$$

و این قانون برای توزیع پیوسته‌ای از بارها:

$$\oint_S\vec{E}\cdot\hat{n}\,da=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\int\rho\,dV \qquad (۲-۱۲)$$

جمله سمت چپ در این روابط، در واقع انتگرال مولفه عمودی میدان الکتریکی بر روی سطح S را شار میدان الکتریکی از سطح S می‌نامند.

قانون گاؤس را می‌توان با استفاده از قضیه دیورژانس به شکل دیفرانسیلی بیان کرد:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_\circ} \qquad (۲-۱۳)$$

کاربرد قانون گاؤس:

به طور کلی این قانون در وضعیتهایی که تقارن کافی است، روش بسیار راحتی برای محاسبه میدان الکتریکی فراهم می‌آورد. برای استفاده از این قانون باید چنان سطح بسته‌ای را انتخاب کنیم که مؤلفه عمودی میدان الکتریکی در تمام نقاط سطح آن صفر یا یک تک مقدار ثابت باشد. به عنوان مثال برای یک بار خطی بسیار بلند که چگالی بار آن در واحد طول λ است، سطح گاوسی مناسب یک سطح استوانه‌ای است، که با استفاده از این قانون برای E و φ، نتایج به صورت زیر خواهند بود:

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_\circ r}\bar{r}\ ,\quad \varphi=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_\circ}\ln r+C \qquad (۲-۱۴)$$

نتیجه مهم دیگری که از این قانون می‌توان بدست آورد، این است که بار (بار خالص) در یک جسم رسانای باردار روی سطح خارجی آن قرار می‌گیرد و میدان درست در خارج از یک جسم رسانای باردار بر سطح رسانا عمود است و مقدار آن برابر است با:

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ} \qquad (۲-۱۵)$$

دو قطبی الکتریکی:

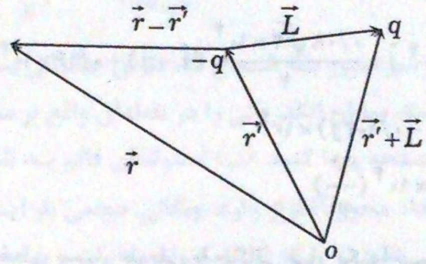
دو بار الکتریکی مساوی و مختلف العلامه که در فاصله کمی از یکدیگر قرار گیرند، یک دو قطبی الکتریکی را تشکیل می‌دهند.

Physicsclass.blogsky.com

میدان الکتریکی و پتانسیل برای یک دو قطبی نقطه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\vec{E}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5}(\vec{r}-\vec{r}')-\frac{\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right\} \quad (۲-۱۶)$$

$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad (۲-۱۷)$$



که $\vec{P}=q\vec{L}$، گشتاور دو قطبی الکتریکی نامیده می‌شود.

انرژی پتانسیل دوقطبی $\vec{P}$ در میدان الکتریکی خارجی $\vec{E}_{ext}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$U(r)=-\vec{P}\cdot\vec{E}_{ext}(r) \quad (۲-۱۸)$$

بسط میدان‌های الکتریکی برحسب چندقطبی‌ها:

چند قطبیهای الکتریکی برای محاسبه تقریبی پتانسیل (و میدان الکتریکی) توزیع بار به کار می‌روند. این کار بر این اساس است که یک توزیع بار گسترده واقعی را با بارهای نقطه‌ای، دو قطبیهای نقطه‌ای و غیره به طور تقریبی برابر می‌گیرند. این تقریب غالباً حل مسائل بسیار مشکل را ممکن می‌سازند.

در فاصله دور از ناحیه‌ای که در آن بارهای چشمه ρ قرار گرفته‌اند، بسط φ برحسب چند قطبیها به صورت زیر است:

$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r}+\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3}+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{x_i x_j}{r^5}Q_{ij}\right] \quad (۲-۱۹)$$

که در آن:

(۲-۲۰)

$$\vec{P}=\int_V r'\rho(r')dV' \;,\; Q_{ij}=\int_V (3x'_i x'_j-\delta_{ij}r'^2)\rho(r')dV'$$

$\vec{P}$ گشتاور دو قطبی توزیع بار و Q_{ij} نه مولفه تانسور گشتاور چهار قطبی توزیع بار است.

تابع دلتای دیراک

می توان با استفاده از تابع دلتای دیراک $\delta(r)$، بارهای نقطه‌ای را به صورت حالت خاصی از تابع چگالی بار کلی $f(r)$ بیان کرد. تابع $\delta(r)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(r)=0 \qquad \text{برای } r\neq 0$$

$$\int\delta(r')dV'=1$$

با استفاده از این تابع بار نقطه‌ای در $\vec{r}=0$:

$$\rho(r)=q\,\delta(r)$$

و برای تابع برداری یا نرده‌ای F:

$$\int F(r')\delta(r')dV'=F(0)$$

$$\int F(r')\,\delta(r'-r_0)dV'=F(r_0)$$

و به همین ترتیب برای بار نقطه‌ای q_i در r_i:

$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{q_i\,\delta(r'-r_i)}{|r-r'|}dV'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|r-r_i|}$$

$$\vec{E}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{q_i\,\delta(r'-r_i)}{|r-r'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')\,dV'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|r-r_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

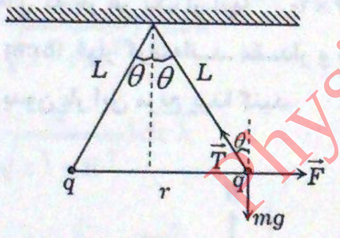
با استفاده از تابع دلتای دیراک، شکل دیفرانسیلی قانون گاوس را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}=4\pi\,\delta(r)$$

مسائل فصل دوم

۲-۱ – دو ذره هر یک به جرم m و به ترتیب با بار $2q,q$ با دو نخ هر یک به طول L از نقطه‌ای مشترک آویزان شده‌اند. زاویه θ را که هر نخ با خط قائم می‌سازد، پیدا کنید.

حل:



$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2} \;,\; r=2L\sin\theta \Rightarrow F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2L\sin\theta)^2} \quad (۱)$$

و همچنین برای نیروهای وارد به هر یک از بارها داریم:

$$\left.\begin{matrix}T\sin\theta=F\\ T\cos\theta=mg\end{matrix}\right\}\Rightarrow \tan\theta=\frac{F}{mg}\Rightarrow F=mg\tan\theta \quad (۲)$$

می دانیم که:

$$\frac{1}{\sin^2\theta}=1+\cot^2\theta=(1+\frac{1}{\tan^2\theta})=(\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta}) \quad (۳)$$

روابط (۳) و (۲) را در رابطه (۱) جایگذاری می‌کنیم، داریم:

$$mg\tan\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2L)^2}(\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta})$$

$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4L^2mg}(\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta})$$

physicsclass.blogsky.com

اگر $\tan\theta=u$, $C=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4L^2 mg}$ بگیریم، معادله زیر بدست می‌آید:

$$u^3-cu^2-c=0$$

با حل معادله درجه سه حاصل، u و در نتیجه $\theta=\tan^{-1}u$ بدست می‌آید.

۲-۲- بار دو کره رسانای کوچک همسان به ترتیب برابر است با $2/0\times10^{-9}C$ و $-0/4\times10^{-9}C$

الف) وقتی این دو کره در فاصله ۴ سانتی متری از یکدیگر قرار گیرند، چه نیرویی به یکدیگر وارد می‌کنند؟

ب) اگر آنها را به هم نزدیک کنیم تا تماس حاصل کنند و بعد به اندازه ۴ سانتی متر آنها را از یکدیگر دور کنیم، چه نیرویی به یکدیگر وارد خواهند کرد؟

حل: الف)

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\times10^{-9}\times(-0/4\times10^{-9})}{(4\times10^{-2})^2}$$

$$=9\times10^{9}\frac{2\times10^{-9}\times(-0/4\times10^{-9})}{(4\times10^{-2})^2}$$

$$F=-\frac{7/2\times10^{-9}}{16\times10^{-4}}=-4/5\times10^{-6}(N)$$ (نیروی جاذبه)

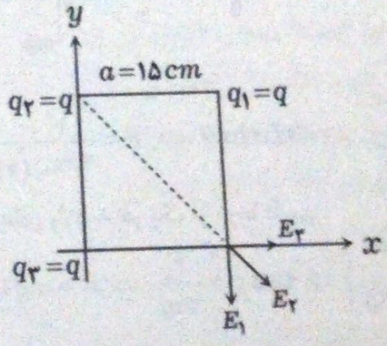
ب: بعد از تماس دو کره رسانای مشابه، هر دو بار یکسانی پیدا می‌کنند، بنابراین:

$$q'=\frac{q_1+q_2}{2}=\frac{2\times10^{-9}-0/4\times10^{-9}}{2}=0/8\times10^{-9}$$

$$F'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q'}{r^2}=9\times10^{9}\frac{(0/8\times10^{-9})^2}{(4\times10^{-2})^2}=0/36\times10^{-5}(N)$$ (نیروی دافعه)

۲-۳- سه بار نقطه‌ای که بار هر یک از آنها 4×10^{-9} است در سه راس مربعی به ضلع 15cm قرار گرفته‌اند. مقدار و جهت میدان الکتریکی را در رأس بدون بار این مربع پیدا کنید.

حل:



با توجه به شکل میدان‌های حاصل از هر یک از بارها به صورت زیر است:

$$\vec E_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{a^2}(-\hat j)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}(-\hat j)$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\times10^{-9}}{(15\times10^{-2})^2}\hat j=-0/16\times10^{4}\hat j$$

$$\vec E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{2a^2}(\cos45^\circ\hat i-\sin45^\circ\hat j)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\times10^{-9}}{2\times(15\times10^{-2})^2}(\frac{\sqrt2}{2}\hat i-\frac{\sqrt2}{2}\hat j)$$

$$=0/08(\frac{\sqrt2}{2}\hat i-\frac{\sqrt2}{2}\hat j)\times10^{4}$$

$$\vec E_3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{a^2}\hat i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\times10^{-9}}{(15\times10^{-2})^2}\hat i=0/16\times10^{4}\hat i$$

بنابر اصل برهم نهی داریم:

$$\vec E=\vec E_1+\vec E_2+\vec E_3$$

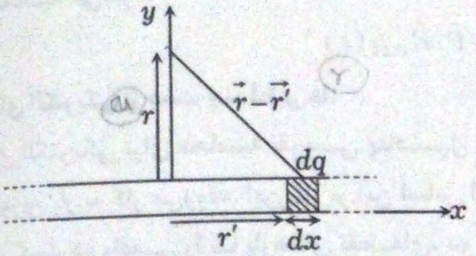
$$=0/16\times10^{4}\hat j+\frac{0/08\sqrt2\times10^{4}}{2}(\hat i-\hat j)+0/16\times10^{4}\hat i$$

$$=(0/216\hat i-0/103\hat j)\times10^{4}$$

$$|\vec E|=0/239\times10^{4}(\frac{V}{m})$$

۲-۴- بار خطی بسیار طویلی با چگالی بار یکنواخت λ در واحد طول مفروض است. با انتگرال‌گیری مستقیم، میدان الکتریکی را در فاصله r از این بار خطی پیدا کنید.

حل:



المان بار:

$$dq=\lambda dx$$

$$\vec r=y\hat j\quad,\quad \vec r'=x\hat i$$

$$d\vec E=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec r-\vec r')}{|r-r'|^3}=\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(y\hat j-x\hat i)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec E=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\,dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\hat j-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\hat i\right]$$

$$=\frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\hat j+0$$

انتگرال دوم صفر است چون انتگرالده تابعی فرد و بازه انتگرال‌گیری متقارن است.

برای محاسبه انتگرال اول به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$x=y\tan\theta$ (تغییر متغیر) $\Rightarrow$ $dx=y\sec^2\theta d\theta$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\quad,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{y\sec^2\theta\,d\theta}{(y^2\tan^2\theta+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Physicsclass.blogsky.com

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{y^2(\tan^2\theta+1)^{\frac{3}{2}}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{y^3 \sec^3\theta}$$

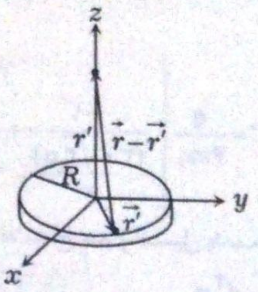
$$=\frac{1}{y^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta=\frac{1}{y^2}\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{y^2}$$

بنابراین:

$$\vec{E}=\frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{y^2}\right)\hat{j}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\hat{j}$$

۲-۵- الف) قرصی مدور به شعاع R، دارای چگالی سطحی بار یکنواخت σ است. میدان الکتریکی را در نقطه‌ای واقع بر محور قرص و در فاصله Z از صفحه پیدا کنید. (ب) استوانه‌ای قائم به شعاع R_0 و ارتفاع L در امتداد محور Z قرار دارد. چگالی حجمی بار این استوانه نسبت به مبدایی واقع در مرکز آن نایکنواخت است و به صورت تابع $\rho(z)=\rho_0+\beta z$ داده می‌شود. نیروی وارد بر بار نقطه‌ای q را که در مرکز این استوانه قرار گرفته است، محاسبه کنید.

حل: الف) در مختصات استوانه‌ای داریم: $dq=\sigma da'=\sigma\rho' d\rho' d\varphi'$



$$\vec{r}=z\hat{k} \quad , \quad \vec{r}'=\rho'\hat{\rho}'_0$$

$$\vec{E}=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|r-r'|^3}$$

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{\sigma\rho' d\rho' d\varphi'(z\hat{k}-\rho'\hat{\rho}'_0)}{(z^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\hat{\rho}'_0=\cos\varphi\hat{i}+\sin\varphi\hat{j}$$

$$\vec{E}=\frac{\delta}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{\rho' z\, d\rho' d\varphi'}{(z^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}-\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{\rho'^2 d\rho' d\varphi'}{(z^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}(\cos\varphi\hat{i}+\sin\varphi\hat{j})\right]$$

چون انتگرال $\cos,\sin$ در بازه $[0,2\pi]$ مقدارشان صفر می‌شوند، بنابراین انتگرال دوم صفر می‌شود.

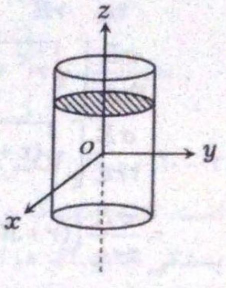
$$\vec{E}=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{\rho' z\, d\rho' d\varphi'}{(z^2+\rho'^2)}=\frac{\sigma z(2\pi)}{4\pi\varepsilon_0}\hat{k}\int_0^R\frac{\rho' d\rho'}{(z^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}=$$

برای حل انتگرال از تغییر متغیر $u=z^2+\rho'^2$ استفاده می‌کنیم، نتیجه حاصل به صورت زیر است.

$$\vec{E}=\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\hat{k}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+\rho'^2}}\right)\Bigg]_0^R=\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\hat{k}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}+\frac{1}{|z|}\right)$$

$$\begin{cases}\vec{E}_1=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) & z>0\\ \vec{E}_2=\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) & z<0\end{cases}$$

(ب) مرکز دستگاه مختصات استوانه‌ای را در محل بار q (در مرکز استوانه) در نظر می‌گیریم، استوانه را به صورت مجموعی از دیسکهای قسمت (الف) در نظر می‌گیریم، بنابراین میدان حاصل در مرکز استوانه:



$$\vec{E}=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} d\vec{E}=\int_{-\frac{l}{2}}^{0} d\vec{E}_2+\int_0^{\frac{l}{2}} d\vec{E}_1$$

$$=\int_{-\frac{l}{2}}^{0}\frac{-p(z)}{2\varepsilon_0}\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)dz\,\hat{k}+\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{p(z)}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)dz\,\hat{k}$$

$$=\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{-(P_0+Bz)}{2\varepsilon_0}\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)dz\,\hat{k}+\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{(P_0+Bz)}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)dz\,\hat{k}$$

$$=\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{-(p_0-\beta z)}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)dz\,\hat{k}+\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{(p_0+\beta z)}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)dz\,\hat{k}$$

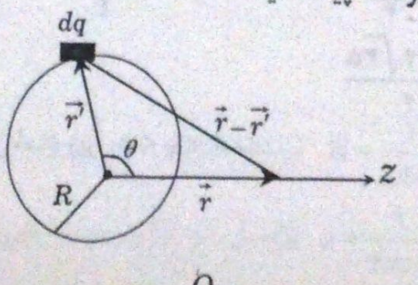
$$=\int_0^{\frac{l}{2}}\left[\frac{(-p_0+\beta z)}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)+\frac{(p_0+\beta z)}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\right]dz\,\hat{k}$$

$$=\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{2\beta z}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)dz\,\hat{k}$$

$$=\frac{\beta}{2\varepsilon_0}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}2z\,dz-\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{2z^2}{\sqrt{z^2+R^2}}dz\right]\hat{k}=\frac{\beta}{2\varepsilon_0}\left[z^2\Big|_0^{\frac{l}{2}}\right.$$

۲-۶- یک پوسته کروی رسانای نازک به شعاع R به طور یکنواخت بار دار شده است و بار کل آن Q است. با انتگرال‌گیری مستقیم، پتانسیل را در نقطه‌ای اختیاری واقع در (الف) داخل پوسته و (ب) خارج پوسته پیدا کنید.

حل:



در مختصات کروی المان بار: $dq=\sigma R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \;,\; \sigma=\frac{Q}{4\pi R^2}$

physicsclass.blogsky.com

$\vec{r} = r\hat{k} \qquad , \qquad \vec{r}' = R\hat{r}_0$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sigma R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\,\frac{1}{rR}(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{\sigma R}{2r\varepsilon_0}\left[\sqrt{r^2+R^2+2rR} - \sqrt{r^2+R^2-2rR}\right]$$

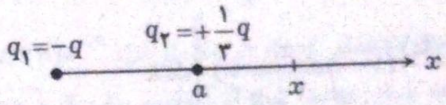
$$= \frac{\sigma R}{2r\varepsilon_0}\left[\sqrt{(r+R)^2} - \sqrt{(r-R)^2}\right]$$

$$= \frac{\sigma R}{2r\varepsilon_0}\left[(r+R) - |r-R|\right]$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{\sigma R}{2r\varepsilon_0}\left[(r+R)-(r-R)\right] = \dfrac{\sigma R^2}{r\varepsilon_0} & r>R \\[2ex] \dfrac{\sigma R}{2r\varepsilon_0}\left[(r+R)+(r-R)\right] = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} & r<R \end{cases}$$

۲ – ۷ (الف) دو بار نقطه‌ای $-q$ و $+\frac{1}{3}q$ به ترتیب در مبدأ مختصات و در نقطه $(a,0,0)$ قرار گرفته‌اند. در چه نقطه‌ای روی محور x میدان الکتریکی صفر می‌شود؟ (ب) در صفحه $x-y$ سطح هم پتانسیلی را که از این نقطه می‌گذرد، رسم کنید. آیا این نقطه، نقطه کمینه واقعی پتانسیل است؟

حل: الف)



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_1 = -\vec{E}_2$$

بنابراین این نقطه باید در خارج از فاصله a قرار گیرد و در این نقطه اندازه این دو میدان با یکدیگر برابر باشد.

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\frac{q}{3})}{(x-a)^2}$$

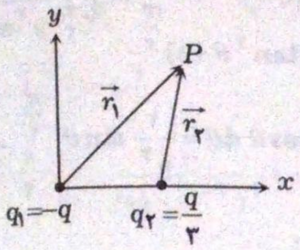
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3(x-a)^2} \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 6xa + 3a^2 = 0$$

$$x = \frac{6a \pm \sqrt{36a^2 - 24a^2}}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{6a + 2\sqrt{3}a}{4} = \frac{(3+\sqrt{3})a}{2}$$

$$x_2 = \frac{6a - 2\sqrt{3}a}{4}$$

x_2 غیر قابل قبول است زیرا $x_2 < a$ است.

(ب) پتانسیل در نقطه P در صفحه (xy) برابر است با:



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\frac{q}{3}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right] \quad (1)$$

بنابراین سطوح هم پتانسیل به صورت زیر هستند:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right] = c$$

با استفاده از اینکه سطح هم پتانسیل باید از نقطه x_1 عبور کند مقدار ثابت c را می‌توان بدست آورد:

$$C = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\frac{(3+\sqrt{3}\,a)}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{(1+\sqrt{3}\,a)}{2}}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-2}{3+\sqrt{3}a} + \frac{\frac{2}{3}}{1+\sqrt{3}a}\right]$$

با قرار دادن مقدار C حاصل در معادله (۱)، معادله سطح هم پتانسیل بدست می‌آید. برای یافتن اینکه این نقطه کمیته پتانسیل است یا نه، باید $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ را در نقطه فوق بدست آوریم، اگر:

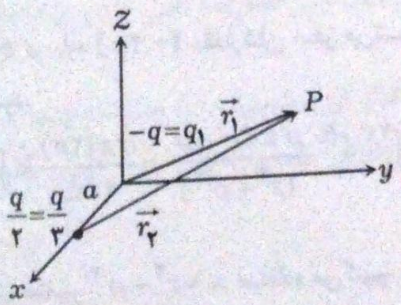
$\frac{d^2\varphi}{dx^2} > 0 \Rightarrow$ x_1 نقطه کمینه پتانسیل است

$\frac{d^2\varphi}{dx^2} < 0 \Rightarrow$ x_1 نقطه بیشینه پتانسیل است

$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \Rightarrow$ x_1 نقطه زینی پتانسیل است

۲ – ۸ نشان دهید که سطح هم پتانسیل $\varphi = 0$ در مسئله قبل کروی شکل است. مختصات مرکز این کره را پیدا کنید.

حل:



$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{q}{3}}{\left[(x-a)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right] = 0$$

Physicsclass.blogsky.com

$$۹\left[(x-a)^۲+y^۲+z^۲\right]=x^۲+y^۲+z^۲$$

$$\Rightarrow\ ۸x^۲-۱۸xa+۹a^۲+۸y^۲+۸z^۲=۰$$

$$\Rightarrow\ (x-\frac{۹}{۸}a)^۲+y^۲+z^۲=\frac{۹}{۶۴}a^۲$$

بنابراین سطح هم پتانسیل $(\varphi=۰)$ حاصل، کره‌ای به شعاع $R=\frac{۳}{۸}a$، مرکز $(\frac{۹}{۸}a,۰,۰)$ است.

۲ – ۹ – استوانه‌ای قائم به شعاع R و ارتفاع L، با چگالی بار یکنواخت ρ، مفروض است. پتانسیل الکتروستاتیکی را در نقطه‌ای واقع بر محور استوانه ولی خارج از توزیع بار محاسبه کنید.

از سیستم مختصات استوانه ای با مبداء منطبق بر مرکز استوانه استفاده می کنیم.

$$\vec{r}=z\hat{k}$$

$$r'=\rho'\cos\varphi'\hat{i}+\rho'\sin\varphi'\hat{j}+z'k$$

$$dV'=\rho'd\rho'd\varphi'dZ',\ \left|\vec{r}-\vec{r'}\right|=\sqrt{\rho'^2+(Z-Z')^2}$$

$$\varphi(Z)=\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\rho'd\rho'\varphi'dz'}{\sqrt{\rho'^2+(Z-Z')^2}}$$

$$=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\sqrt{\rho'^2+(Z-Z')^2}\Big]_0^R dz'$$

$$=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\sqrt{R^2+(Z-Z')^2}-(z-z')dz'$$

$$=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left\{-ZL+\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\sqrt{R^2+(Z-Z')^2}dz'\right\}$$

از اینکه $\left|Z-Z'\right|=Z-Z',Z'<Z$ استفاده شده است.

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\sqrt{R^2+(Z-Z')^2}dz'=-R^2\int\sec^3 udu$$

$$z-z'=R\tan u\Rightarrow\sec u=\frac{\sqrt{R^2+(Z-Z')^2}}{R}$$

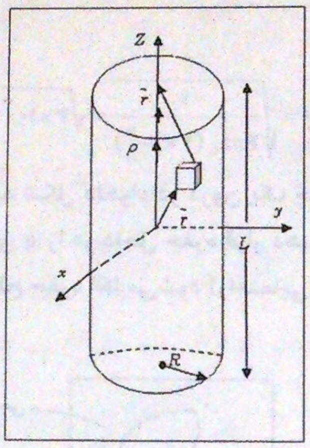
$$\int\sec^3 udu=\frac{1}{2}\sec u.\tan u+\frac{1}{2}\ln(\sec+\tan u)$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\sqrt{R^2+(Z-Z')}dz'$$

$$=-\frac{R^2}{2}\left[\frac{\sqrt{R^2+(Z-Z')^2}\times(Z-Z')}{R^2}+\frac{\ln\sqrt{R^2+(Z-Z')}^2+(z-z')}{R}\right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}$$

$$\varphi(Z)=\frac{\rho}{۴\pi\varepsilon_۰}\{(Z+\frac{۱}{۲})\sqrt{R^۲+(Z+\frac{L}{۲})^۲}-(Z-\frac{L}{۲})\sqrt{R^۲+(Z-\frac{L}{۲})^۲}$$

$$-۲ZL+R^۲\ln\left[\frac{(z+\frac{۱}{۲})+\sqrt{R^۲+(Z+\frac{l}{۲})^۲}}{(z-\frac{۱}{۲})+\sqrt{R^۲+(Z-\frac{l}{۲})^۲}}\right]$$



۲ – ۱۰ – میدان الکتریکی در تمام نقاط ناحیه از فضا موازی محور x است. ثابت کنید که در این ناحیه میدان الکتریکی به مختصات y,x بستگی ندارد. اگر در این ناحیه از فضا باری وجود نداشته باشد، ثابت کنید که میدان به متغییر x بستگی نخواهد داشت.

حل:

$$\vec{E}=E_x\hat{i}\ ,\ \vec{\nabla}\times\vec{E}=۰$$

$$\Rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{E}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\E_x&۰&۰\end{vmatrix}=\hat{j}\frac{\partial E_x}{\partial z}-\hat{k}\frac{\partial E_x}{\partial y}=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial E_x}{\partial z}=۰\\\frac{\partial E_x}{\partial y}=۰\end{cases}\Rightarrow\ E_x=E_x(x)$$

اگر در این ناحیه باری وجود نداشته باشد، بنابراین:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_۰}=۰\Rightarrow\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=۰$$

و چون $\vec{E}$ فقط مؤلفه x دارد یعنی:

$E_y=E_z=۰\Rightarrow\frac{\partial E_x}{\partial x}=۰\Rightarrow$ مؤلفه E_x مستقل از x است

بنابراین میدان الکتریکی به متغیر x هم وابسته نیست.

۲ – ۱۱ – قدرت دی الکتریکی هوا (یعنی آن مقدار میدان الکتریکی که در بالاتر از آن هوا رسانا می‌شود) مساوی $۳\times۱۰^۶\frac{V}{m}$ است.

(الف) حداکثر پتانسیلی را که یک کره رسانای منزوی به شعاع $۸cm$ می‌تواند داشته باشد چقدر است؟

(ب) شعاع یک رسانای کروی که بتواند ۱ کولن بار داشته باشد، چقدر است؟

حل: (الف)

میدان الکتریکی کره منزوی در نزدیکی سطح آن $E=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q}{R^۲}$

پتانسیل کره منزوی در نزدیکی سطح آن $\varphi=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q}{R}$

$$\Rightarrow\ \varphi_{max}=ER=۳\times۱۰^۶\times۰/۰۸=۲۴\times۱۰^۴\,V$$

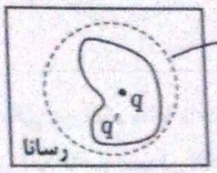
Physicsclass.blogsky.com

ب)
$$E=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q}{R^۲}$$

$$\Rightarrow\quad R=\sqrt{\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰E}}=\sqrt{\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰(۳\times۱۰^۶)}}=\sqrt{۳\times۱۰^۳}=۵۴/۸(m)$$

۲ – ۱۲ – حفره‌ای به شکل دلخواه در درون یک جسم رسانا موجود است. اگر بار نقطه‌ای q را در داخل حفره قرار دهیم، ثابت کنید باری به مقدار q− در سطح حفره القا می‌شود (راهنمایی: از قانون گاوس استفاده کنید.)

حل:



سطح گاوسی مفروض را کاملاً در رسانا در نظر می‌گیریم و چون می‌دانیم که میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر است، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}\oint_S \vec{E}\cdot ds=\dfrac{Q_{in}}{\varepsilon_۰}\\ \vec{E}=۰\end{array}\right\}\Rightarrow Q_{in}=۰$$

Q_{in} شامل تمام باری که در سطح گاوسی مفروض می‌شود، اگر بار القایی روی سطح حفره را q' بنامیم، داریم:

$$Q_{in}=۰\Rightarrow q+q'=۰\Rightarrow q'=-q$$

۲ – ۱۳ – میدان الکتریکی در جو در نزدیکی سطح زمین تقریباً $۲۰۰\frac{V}{m}$ و جهت آن به طرف پائین است. درارتفاع $۱۴۰۰m$ از سطح زمین میدان الکتریکی در جو فقط $۲۰\frac{V}{m}$ و باز هم به سمت پایین است.

الف) چگالی متوسط بار در جو در ارتفاع کمتر از $۱۴۰۰m$ چقدر است؟

ب) آیا این بار بیشتر از یونهای مثبت تشکیل شده است. یا از یونهای منفی؟

حل: میدان الکتریکی به سمت پائین است، بنابراین:

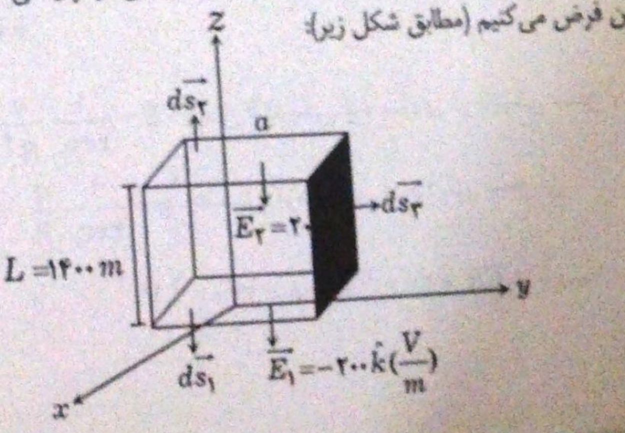
$$\vec{E}=E_z\hat{k}$$

با توجه به مسئله (۲–۱۰)، $E_z=E_z(z)$ است، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_۰}\\ \vec{E}=E_z(z)\hat{k}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{dE_z}{dz}=\frac{\rho}{\varepsilon_۰}\Rightarrow\int_{-۲۰۰}^{-۲۰}dE_z=\frac{\rho}{\varepsilon_۰}\int_۰^{۱۴۰۰}dz$$

$$(-۲۰+۲۰۰)=\frac{\rho}{\varepsilon_۰}۱۴۰۰\Rightarrow\rho=+\frac{۱۸۰\varepsilon_۰}{۱۴۰۰}$$

روش دیگر برای حل این مسئله، یک سطح گاوسی مکعبی در نزدیکی سطح زمین فرض می‌کنیم (مطابق شکل زیر):



$$\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{q}{\varepsilon_۰}=\frac{\rho a^۲L}{\varepsilon_۰}$$

$$\int_{S_۱}\vec{E}\cdot d\vec{s}+\int_{S_۲}\vec{E}\cdot d\vec{s}+۰=\frac{\rho a^۲L}{\varepsilon_۰}$$

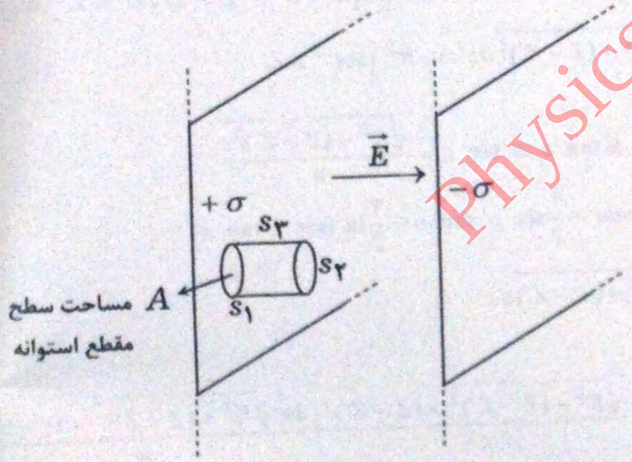
$$۲۰۰a^۲-۲۰a^۲=\frac{\rho a^۲L}{\varepsilon_۰}\Rightarrow\rho=\frac{۱۸۰\varepsilon_۰}{۱۴۰۰}$$

۲ – ۱۴ – دو صفحه رسانای نامتناهی و موازی به فاصله d از یکدیگر قرار دارند. چگالی سطحی بار در سطوح داخلی این صفحات به ترتیب $\sigma,-\sigma$ و یکنواخت است.

الف) میدان الکتریکی را در فضای میان دو صفحه به دست آورید.

ب) ثابت کنید که میدان الکتریکی در فضای خارج دو صفحه صفر است. (توجه: میدان الکتریکی که دو صفحه رسانای باردار موازی و متناهی در فضای میان دو صفحه تولید می‌کنند اساساً با میدان الکتریکی که در بالا به دست آمد، یکسان است، مشروط بر آنکه ابعاد سطوح این صفحه‌ها در مقایسه با فاصله d میان آنها بزرگ باشند. چنین آرایشی را خازن می‌نامند (به فصل ۶ رجوع شود)).

حل: چون بار روی صفحات رسانا به صورت یکنواخت توزیع شده است، بنابراین میان این دو صفحه میدان الکتریکی یکنواختی از چگالی بار مثبت به چگالی بار منفی برقرار است.



الف) یک سطح گاوسی استوانه‌ای مطابق شکل در نظر می‌گیریم:

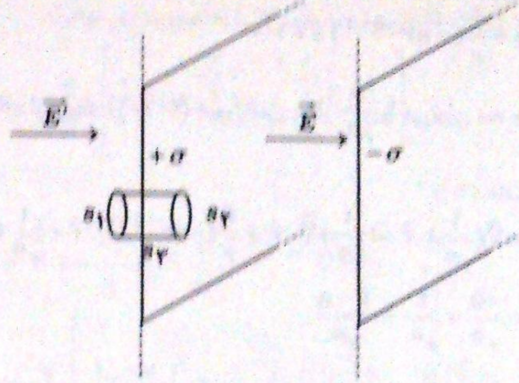
$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{q}{\varepsilon_۰}\Rightarrow\int_{S_۱}\vec{E}\cdot d\vec{s}+\int_{S_۲}\vec{E}\cdot d\vec{s}+\int_{S_۱}\vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{q}{\varepsilon_۰}$$

$$۰+EA+۰=\frac{\sigma A}{\varepsilon_۰}\Rightarrow E=\frac{\sigma}{\varepsilon_۰}$$

میدان در داخل یک رسانا صفر است، بنابراین انتگرال روی سطح $S_۱$ صفر می‌شود و انتگرال روی سطح $S_۳$ صفر است چون بردار عمود بر سطح عمود بر میدان الکتریکی است.

ب)

Physicsclass.blogsky.com



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{S_1} \vec{E}'\cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{S_3} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$E'A + EA + 0 = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E' + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E' = 0$$

۲ - ۱۵ - چگالی حجمی بار در یک توزیع بار کروی تابعی است که فقط به r، فاصله از مرکز توزیع، بستگی دارد. به عبارت دیگر $\rho = \rho(r)$ اگر $\rho(r)$ به صورت تابعی که در زیر می‌آید باشد، میدان الکتریکی را به صورت تابعی از r بدست آورید. با فرض اینکه پتانسیل الکتریکی در بی نهایت صفر است، یعنی $\varphi(\infty) = 0$ با انتگرال‌گیری از نتیجه بالا، پتانسیل الکتریکی $\varphi(r)$ را پیدا کنید.

الف) به ازای $0 \le r \le R$، $\rho = \frac{A}{r}$ و A مقدار ثابتی است، به ازای $r > R$، $\rho = 0$. (ب) به ازای $0 \le r \le R$، $\rho = \rho_0$ (یعنی ثابت است)، به ازای $r > R$، $\rho = 0$.

حل: الف) برای بدست آوردن میدان الکتریکی حاصل از چگالی حجمی بار $\rho(r)$، از قانون گاوس با سطح گاوسی کروی به شعاع r $(r < R)$ استفاده می‌کنیم، بنابراین:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$q = \int \rho\, dv = \int_0^r \frac{A}{r} 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi A r^2}{2} = 2\pi A r^2$$

q مقدار بار در داخل سطح گاوسی مفروض است، و بدلیل تقارن کروی حاکم میدان الکتریکی فقط $\hat{r}_0$ دارد و فقط به متغیر r وابسته است، بنابراین:

$$E\oint ds = \frac{2\pi A r^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{2\pi A r^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{A}{2\varepsilon_0}\hat{r}_0 \qquad r < R$$

میدان الکتریکی برای $r > R$:

سطح گاوسی مفروض را یک سطح کروی به شعاع r $(r > R)$ در نظر می‌گیریم، و بدلیل تقارن کروی حاکم میدان الکتریکی فقط مؤلفه $\hat{r}_0$ دارد و فقط به متغیر r وابسته است، بنابراین:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$q = \int_0^R \rho\, dv = \int_0^R \frac{A}{r} 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi A R^2}{2} = 2\pi A R^2$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{2\pi A R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{AR^2}{2\varepsilon_0 r^2}\hat{r}_0 \qquad r > R$$

و پتانسیل برای این دو حالت:

$$\varphi(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = +\int_r^\infty \frac{AR^2}{2\varepsilon_0 r^2}\hat{r}_0\cdot d\vec{r} = \frac{AR^2}{2\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{AR^2}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty = \frac{AR^2}{2\varepsilon_0 r} \qquad r > R$$

$$\varphi(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = +\int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^R \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_r^R \frac{A}{2\varepsilon_0}\hat{r}_0\cdot d\vec{r} + \int_R^\infty \frac{AR^2}{2\varepsilon_0 r^2}\hat{r}_0\cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{A}{2\varepsilon_0}(R - r) + \frac{AR^2}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty = \frac{A}{\varepsilon_0}\left(R - \frac{r}{2}\right) \qquad r < R$$

(ب) در این حالت نیز سطح گاوسی مثل قسمت (الف) سطح کروی فرض می‌شود، بنابراین:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad q = \int_0^r \rho\, dv = \int_0^r \rho_0 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{\frac{4}{3}\rho_0 \pi r^3}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\hat{r}_0 \qquad r < R$$

برای میدان الکتریکی در $r > R$:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad q = \int_0^R \rho\, dv = \int_0^R \rho_0 4\pi r^2\, dr = \rho_0 \frac{4\pi}{3}R^3$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \rho_0 \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}R^3$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{3 r^2 \varepsilon_0}\hat{r}_0 \qquad r > R$$

پتانسیل الکتریکی برای این دو حالت:

$$\varphi(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = +\int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = +\int_r^\infty \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r} \qquad r > R$$

$$\varphi(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = +\int_r^R \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

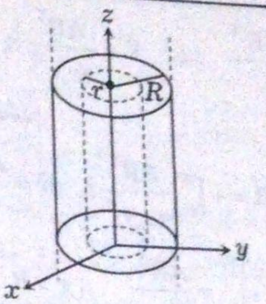
$$= \int_r^R \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\hat{r}_0\cdot d\vec{r} + \int_R^\infty \frac{\rho_0 R^3}{3 r^2 \varepsilon_0}\hat{r}_0\cdot d\vec{r} =$$

$$= \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(R^2 - r^2) + \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R^2 = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right) \qquad r < R$$

۲ - ۱۶ - میله‌ای گرد با طول بینهایت و شعاع R دارای چگالی بار یکنواخت ρ است. با استفاده از قانون گاوس میدان الکتریکی را در فواصل $r > R$ و $r < R$ به دست آورید.

حل: برای حالت $r < R$، سطح گاوسی را به صورت سطح یک استوانه با شعاع r $(r < R)$ و طول L در نظر می‌گیریم.

physicsclass.blogsky.com

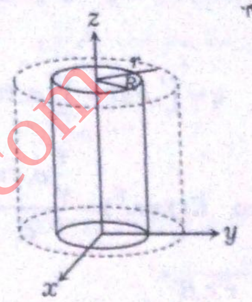


$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{q}{\varepsilon_0}\quad,\quad q=\int\rho\, dv=\rho(\pi r^2 L)$$

به دلیل تقارن استوانه‌ای حاکم و طول بینهایت میله، میدان الکتریکی $\vec{E}$ مولفه φ و z ندارد و فقط تابعی از r است، بنابراین:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=E(2\pi rL)=\frac{\rho\pi r^2 L}{\varepsilon_0}\quad\Rightarrow\quad \vec{E}=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r}$$

برای حالت $r>R$، سطح استوانه‌ای با شعاع r $(r>R)$ را به عنوان سطح گاوسی در نظر می‌گیریم.



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{q}{\varepsilon_0}\quad,\quad q=\rho(\pi R^2 L)$$

بدلیل تقارن استوانه‌ای حاکم و طول بینهایت میله، میدان الکتریکی $\vec{E}$ تنها دارای مولفه شعاعی است و فقط تابعی از r است، در واقع به صورت شعاعی تغییر می‌کند بنابراین:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=E(2\pi rL)=\frac{\rho(\pi R^2 L)}{\varepsilon_0}\quad\Rightarrow\quad \vec{E}=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

۲-۱۷- (الف) تاو و دیورژانس بردار $\frac{\vec{r}}{r^a}$ را حساب کنید. (ب) کدام چگالی بار، $\rho(r)$، میدان الکتریکی زیر را تولید می‌کند؟

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^a}$$

(ج) پتانسیل این میدان کدام است؟

حل: الف) با استفاده از رابطه (۱-۱-۹) تاو بردار $\frac{\vec{r}}{r^a}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{r}}{r^a}\right)=\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^a}\right)\times\vec{r}+\frac{1}{r^a}\vec{\nabla}\times\vec{r}$$

با توجه به رابطه (۱-۵۲) می‌دانیم که:

$$\vec{\nabla}\times\vec{r}=0$$

و با توجه به مسئله (۱-۲۲) گرادیان تابع $\left(\frac{1}{r^a}\right)$ را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^a}\right)=\frac{\vec{r}}{r}(-ar^{-a-1})$$

بنابراین تاو این بردار به صورت زیر است:

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{r}}{r^a}\right)=\frac{\vec{r}}{r}(-ar^{-a-1})\times\vec{r}=0$$

با استفاده از رابطه (۱-۱-۷) دیورژانس بردار $\frac{\vec{r}}{r^a}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^a}\right)=\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^a}\right)\cdot\vec{r}+\left(\frac{1}{r^a}\right)\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=\frac{\vec{r}}{r}(-ar^{-a-1})\cdot\vec{r}+\frac{1}{r^a}(3)$$

$$=\frac{-a}{r^a}+\frac{3}{r^a}=\frac{3-a}{r^a}$$

ب)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^a}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^a}=\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

با توجه به قسمت (الف) برای دیورژانس بردار $\frac{\vec{r}}{r^a}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3-a}{r^a}\right)=\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}\quad\Rightarrow\quad\rho(r)=\frac{q(3-a)}{4\pi r^a}$$

و پتانسیل این میدان برابر است با:

$$\varphi(r)=-\int_\infty^r\vec{E}\cdot d\vec{l}=+\int_r^\infty E\cdot d\vec{r}=\int_r^\infty\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^{a-1}}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty\frac{1}{r^{a-1}}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(a-2)r^{a-2}}\qquad a\neq 2$$

۲-۱۸- فرض کنید که نماد در میدان کولنی دقیقاً ۳ نیست، بلکه برابر با $a=3-\delta$ است که در آن $\delta<<1$ انتگرال $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ را در حجم کره‌ای به شعاع R که بار q در مرکز آن قرار دارد، حساب کنید.

حل:

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\xrightarrow{\text{فرض مسئله}}\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^{3-\delta}}$$

$$\int\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dv=\int_0^R\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^{3-\delta}}\right)4\pi r^2\,dr$$

$$=\frac{q(4\pi)}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^{3-\delta}}\right)r^2\,dr=$$

و طبق نتیجه مسئله (۱۷) داریم:

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^a}=\frac{3-a}{r^a}\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^{3-\delta}}=\frac{3-(3-\delta)}{r^{3-\delta}}=\frac{\delta}{r^{3-\delta}}$$

$$\int\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dv=\frac{q}{\varepsilon_0}\int_0^R\frac{\delta}{r^{3-\delta}}r^2\,dr=\frac{q}{\varepsilon_0}\int_0^R\delta r^{\delta-1}\,dr=\frac{q}{\varepsilon_0}R^\delta$$

اگر $\delta\to 0$ آنگاه به قانون گاوس می‌رسیم.

۲-۱۹- پتانسیل استتار شده کولنی، که به صورت زیر است:

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r}$$

پتانسیل مناسب برای بار q در محیط نیم رسانا است. میدان الکتریکی و چگالی بار مربوط به این پتانسیل را بدست آورید.

حل:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r}\right)$$

Physicsclass.blogsky.com

با توجه به اتحاد (۱-۱-۵) می‌توان رابطه بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\vec{\nabla}(e^{-\frac{r}{\lambda}}) + e^{-\frac{r}{\lambda}}\vec{\nabla}(\frac{1}{r})\right]$$

و با توجه به مسئله (۱۷):

$$\vec{\nabla}(e^{-\frac{r}{\lambda}}) = \frac{-1}{\lambda}e^{-\frac{r}{\lambda}}\frac{\vec{r}}{r} \quad , \quad \vec{\nabla}(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}(\frac{-e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda}) + e^{-\frac{r}{\lambda}}(\frac{-1}{r^2})\right]\frac{\vec{r}}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{r}\right]e^{-\frac{r}{\lambda}}\frac{\vec{r}}{r^2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{q}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{r}\right]e^{-\frac{r}{\lambda}}\frac{\vec{r}}{r^2}$$

$$\rho = \frac{q}{4\pi}\left[\frac{1}{\lambda}\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}\vec{r}}{r^2}\right) + \vec{\nabla}\cdot\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}\vec{r}}{r^3}\right] = \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^2}\vec{r}) = \vec{\nabla}(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^2})\cdot\vec{r} + \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^2}\vec{\nabla}\cdot\vec{r}$$

$$= \left[\frac{-1}{\lambda r^3}e^{-\frac{r}{\lambda}}\vec{r}\cdot\vec{r} + \frac{-2}{r^4}e^{-\frac{r}{\lambda}}\vec{r}\cdot\vec{r}\right] + \frac{3e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^2}$$

$$= -\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda r} + \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^2} \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^3}\vec{r}) = \vec{\nabla}e^{-\frac{r}{\lambda}}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} + e^{-\frac{r}{\lambda}}\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}$$

با توجه به رابطه (۲-۵۷) می‌دانیم که:

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\delta(r)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^3}\vec{r}) = \frac{-e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda r^4}\vec{r}\cdot\vec{r} + 4\pi e^{-\frac{r}{\lambda}}\delta(r)$$

$$= \frac{-e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda r^2} + 4\pi e^{-\frac{r}{\lambda}}\delta(r) \qquad (3)$$

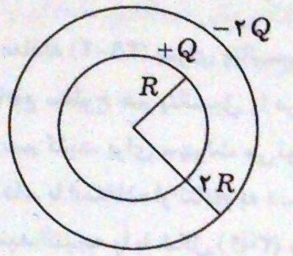
با جایگذاری روابط (۲) و (۳) در رابطه (۱) داریم:

$$\rho = \frac{q}{4\pi}\left[\frac{1}{\lambda}(-\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda r} + \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^2}) + (-\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{\lambda r^2} + 4\pi e^{-\frac{r}{\lambda}}\delta(r))\right]$$

$$= q\left[\delta(r) - \frac{1}{4\pi\lambda^2 r}\right]e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

۲-۲۰- کره‌ای رسانا به شعاع R و باری Q توسط پوسته‌ای کروی و متحدالمرکز با آن و به شعاع $2R$ احاطه شده است. این پوسته با بار $-2Q$ به طور یکنواخت باردار شده است. (الف) با استفاده از قانون گاوس میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضا محاسبه کنید. (ب) پتانسیل را در تمام نقاط فضا به دست آورید.

حل:



(الف) برای $0 < r < R$ سطح گاوسی به صورت کره‌ای به شعاع r در نظر می‌گیریم، و با توجه به تقارن کروی حاکم $\vec{E}$ فقط مولفه شعاعی دارد و فقط به صورت شعاعی تغییر می‌کند، بنابراین:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{0}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = 0 \qquad r<R$$

برای $2R > r > R$ نیز سطح گاوسی را به صورت کره‌ای به شعاع r که $R < r < 2R$ در نظر می‌گیریم، در این قسمت نیز تقارن کروی حاکم است، بنابراین:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0}\hat{r}_0 \qquad R<r<2R$$

برای حالت $r < 2R$، نیز سطح کروی به شعاع r $(r > 2R)$ در نظر می‌گیریم، با توجه به تقارن کروی حاکم داریم:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{-2Q+Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_3 = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}_0 \qquad r>2R$$

پتانسیل برای $0 < r < R$:

$$\varphi(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_r^R \vec{E}_1\cdot d\vec{r} + \int_R^{2R}\vec{E}_2\cdot d\vec{r} + \int_{2R}^\infty \vec{E}_3\cdot dr$$

$$= \int_r^R 0\,dr + \int_R^{2R}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr + \int_{2R}^\infty \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{2R} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{2R}^\infty = 0$$

پتانسیل در فاصله $R < r < 2R^2$:

$$\varphi(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_r^{2R}\vec{E}_2\cdot d\vec{r} + \int_{2R}^\infty \vec{E}_3\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_r^{2R}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr + \int_{2R}^\infty \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_r^{2R} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{2R}^\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right]$$

پتانسیل در فاصله $r > 2R$:

physicsclass.blogsky.com

$$\varphi(r)=-\int_{\infty}^{r}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{r}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{r}^{\infty}\vec{E}_{2}\cdot d\vec{r}$$

$$=\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r}^{\infty}\frac{dr}{r^2}=\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_{r}^{\infty}=\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

۲ – ۲۲ – با استفاده از معادله (۲–۳۹) برای پتانسیل حاصل از دو قطبی $\vec{P}$، طرحی از مقاطع سطوح هم پتانسیل را در صفحه‌ای که حاوی دو قطبی باشد، رسم کنید. برای سهولت می‌توان دو قطبی را در مبداء مختصات قرار داد. با استفاده از نتایج به دست آمده بعضی از خطوط نیرو را رسم کنید. نتیجه را با شکل (۲–۳) مقایسه کنید.

حل: پتانسیل حاصل از دوقطبی $\vec{P}$ برابر است با:

$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

با فرض اینکه دو قطبی در مبداء مختصات و در صفحه xy باشد داریم:

$$\vec{r}'=0\,,\quad \vec{p}=p_x\hat{i}+p_y\hat{j}$$

و برای مقاطع سطوح هم پتانسیل بردار $\vec{r}$ به صورت زیر است:

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\qquad,\qquad z=0$$

بنابراین برای مقاطع سطوح هم پتانسیل در صفحه xy داریم:

$$\varphi=\frac{xp_x+yp_y}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=C\qquad\Rightarrow$$

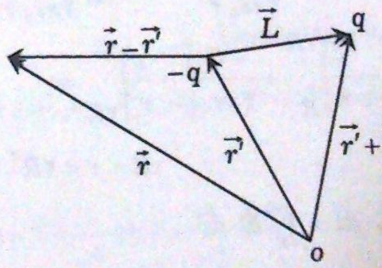
۲ – ۲۳ (الف) نشان دهید که بر دو قطبی $\vec{P}$، که در میدان خارجی $\vec{E}_{ext}$ قرار گرفته است، نیرویی برابر با $\vec{P}.\vec{\nabla}\vec{E}_{ext}$ وارد می‌شود.

(ب) نشان دهید که گشتاور نیروی وارد بر این دو قطبی در این میدان عبارت است از

$$\vec{\tau}=\vec{r}\times\left[(\vec{p}.\vec{\nabla})\vec{E}_{ext}\right]+\vec{P}\times\vec{E}_{ext}$$

که در آن $\vec{r}$ بردار فاصلهٔ دو قطبی از نقطه‌ای است که گشتاور نیرو نسبت به آن محاسبه می‌شود. کمیت $\vec{P}\times\vec{E}_{ext}$ که به مختصات نقطه‌ای که گشتاور نیرو نسبت به آن محاسبه می‌شود بستگی ندارد، جفت چرخشی وارد بر دو قطبی نامیده می‌شود.

حل: الف)



$$\vec{F}=-q\vec{E}_{ext}(\vec{r}')+q\vec{E}_{ext}(\vec{r}'+\vec{L})$$

بسط تیلور $\vec{E}_{ext}$ را حول r' به صورت زیر است:

$$\vec{E}_{ext}(\vec{r}'+\vec{L})=\vec{E}_{ext}(\vec{r}')+\vec{L}\cdot\vec{\nabla}\vec{E}_{ext}(r')$$

بنابراین نیروی وارد بر این دو قطبی برابر است با:

$$\vec{F}=-q\vec{E}_{ext}(\vec{r}')+q\vec{E}_{ext}(\vec{r}')+q\vec{L}\cdot\vec{\nabla}\vec{E}_{ext}(\vec{r}')$$

$$=\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\vec{E}_{ext}(\vec{r}')$$

ب)

$$\tau=(\vec{r}'+\vec{L})\times q\vec{E}_{ext}(\vec{r}'+\vec{L})-\vec{r}'\times q\vec{E}_{ext}(\vec{r}')$$

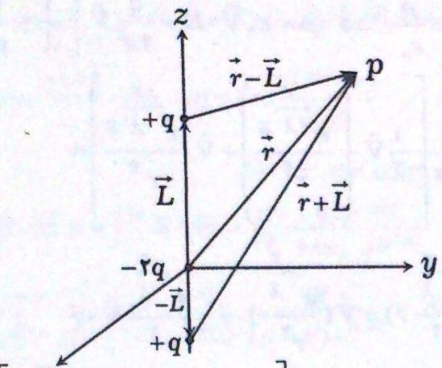
$$=(\vec{r}'+\vec{L})\times q\left[\vec{E}_{ext}(\vec{r}')+\vec{L}\cdot\vec{\nabla}\vec{E}_{ext}(r')\right]$$

$$-\vec{r}'\times q\vec{E}_{ext}(\vec{r}')=\vec{r}'\times(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}_{ext}(r')+\vec{p}\times\vec{E}_{ext}(\vec{r}')$$

۲ – ۲۴ سه بار در یک آرایش خطی قرار گرفته‌اند. بار $-2q$ در مبداء مختصات و دو بار دیگر که مقدار هر یک $+q$ است به ترتیب در نقاط $(0,0,-L)$ و $(0,0,L)$ واقع‌اند. (الف) رابطه نسبتاً ساده‌ای برای پتانسیل $\varphi(\vec{r})$ که در فواصل $|r|>>L$ صادق باشد، پیدا کنید.

(ب) سطوح هم پتانسیل آن را در صفحه x، z رسم کنید.

حل: الف)



$$\varphi(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{L}|}-\frac{2}{|\vec{r}|}+\frac{1}{|\vec{r}+\vec{L}|}\right]\qquad(1)$$

$$|\vec{r}-\vec{L}|^{-1}=(r^2-2\vec{r}\cdot\vec{L}+L^2)^{-\frac{1}{2}}=r^{-1}(1-2\frac{\vec{r}\cdot\vec{L}}{r^2}+\frac{L^2}{r^2})^{-\frac{1}{2}}$$

$$=r^{-1}\left[1-\frac{1}{2}(-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{L}}{r^2}+\frac{L^2}{r^2})+(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(\frac{1}{2!})(\frac{-2\vec{r}\cdot\vec{L}}{r^2}+\frac{L^2}{r^2})^2+\dots\right]$$

$$=\frac{1}{r}\left[1+\frac{\vec{r}\cdot\vec{L}}{r^2}-\frac{L^2}{2r^2}+\frac{3}{8}(\frac{2\vec{r}\cdot\vec{L}}{r^2})^2+\dots\right]\qquad(2)$$

به همین ترتیب:

$$|\vec{r}+\vec{L}|^{-1}=\frac{1}{r}\left[1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{L}}{r^2}-\frac{L^2}{2r^2}+\frac{3}{8}(\frac{2\vec{r}\cdot\vec{L}}{r^2})^2+\dots\right]\qquad(3)$$

با جایگذاری (۲) و (۳) در رابطه (۱) داریم:

$$\varphi(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-L^2}{r^3}+\frac{3(\vec{L}\cdot\vec{r})^2}{r^5}+\dots\right]\approx\frac{qL^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\cos^2\theta-1\right]$$

۲ – ۲۵ تانسور گشتاور چار قطبی توزیع بار مسئله (۲–۲۴) را پیدا کنید.

حل: رابطه (۲–۲۵) برای توزیع گسسته بار به صورت زیر است:

$$Q_{ij}=\int_V(3x'_i x'_j-\delta_{ij}r'^2)\rho(r')dv'\to Q_{ij}$$

$$=\sum_{m=1}^{N}(3x'_{im}x'_{jm}-\delta_{ij}r'^2_m)q_m\qquad(i,j=1,2,3\ \text{یا}\ x,y,\dots)$$

N تعداد بارها است. x_{im}، مختصه iام mامین بار است.

Physicsclass.blogsky.com

$$Q_{11}=(3x'_{11}\,x'_{11}-r'^{2}_{1})q_1+(3x'_{12}\,x'_{12}-r'^{2}_{2})q_2$$
$$+(3x'_{13}\,x'_{13}-r'^{2}_{3})q_3=-2qL^2$$

به همین ترتیب:

$$Q_{11}=Q_{22}=-2qL^2 \quad , \quad Q_{33}=4qL^2$$
$$Q_{12}=3x'_{11}\,x'_{21}q_1+3x'_{12}\,x'_{22}q_2+3x'_{13}\,x'_{23}q_3=0$$

و به همین ترتیب:

$$Q_{12}=Q_{21}=Q_{13}=Q_{31}=Q_{23}=Q_{32}=0$$

بنابراین، تانسور گشتاور چار قطبی برابر است با:

$$Q_{ij}=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} -2qL^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2qL^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4qL^2 \end{bmatrix}=-2qL^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

۲ – ۲۶ – با استفاده از توابع دلتا در مورد توزیع بارهای نقطه‌ای، نشان دهید که گشتاور دو قطبی یک جفت بار نقطه‌ای، یعنی $\vec{p}=q\vec{L}$، از تعریف کلی زیرنتیجه می‌شود.

$$\vec{p}=\int \vec{r}'\rho(\vec{r}')dv'$$

حل: ρ با استفاده از تابع دلتا برای یک دو قطبی نقطه‌ای به صورت زیر است:

$$\rho(r')=-q\delta(\vec{r}-\vec{r}')+q\delta(\vec{r}-(\vec{r}'+\vec{L}))$$

بنابراین:

$$\vec{P}=\int \vec{r}'(-q\delta(\vec{r}-\vec{r}')+q\delta(\vec{r}-(\vec{r}'+\vec{L})))dv'=$$

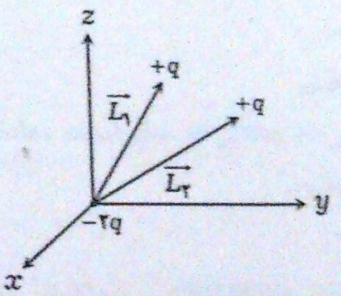
برای تابع دلتا می‌دانیم که:

$$\int F(r)\delta(r-r_0)dr=F(r_0)$$
$$\vec{P}=\int \vec{r}'(-q\delta(\vec{r}-\vec{r}'))dv'+\int r'q\delta(\vec{r}-(\vec{r}'+\vec{L}))dv'$$
$$=-q\vec{r}'+q(\vec{r}'+\vec{L})=q\vec{L}=\vec{P}$$

۲ – ۲۷) فرض کنید مولکولی عبارت است از بار $-2q$ در مبداء مختصات و دوبار $+q$ که در نقاط $\vec{l}_1$ و $\vec{l}_2$ قرار دارند و $|\vec{l}|=|\vec{l}_2|=l$ است.

الف) گشتاور دو قطبی مولکولی را پیدا کنید. ب) برای مولکول H_2O، $l=0/958\times 10^{-10}\ m$ و زاویه میان $\vec{l}_1$ و $\vec{l}_2$ برابر با 105° است. اگر $P=6/14\times 10^{-30}\ c.m$ باشد، بار مؤثر q را بدست آورید.

حل:



$$\vec{P}_{total}=\vec{P}_1+\vec{P}_2$$
$$P^2{}_{total}=P_1^2+P_2^2+2\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2\cos\theta$$

$$\vec{P}_1=\vec{P}_2=q\vec{L}$$
$$P^2_{total}=2P^2(1+\cos\theta)=4P^2\cos^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow |\vec{P}|=(2P\cos\frac{\theta}{2})$$

۲ – ۲۸ – میدان الکتریکی دو قطبی نقطه‌ای را با محاسبه گرادیان تابع زیر بدست آورید؟

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

حل:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi=-\vec{\nabla}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3}\right)=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3}\right)$$

با توجه به اتحاد (۱ – ۱ – ۵) می‌توان نوشت:

$$\vec{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{r})+(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]$$

و با توجه به مسئله (۱ – ۲۰) می‌دانیم که اگر $\vec{A}$ بردار ثابتی باشد:

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{r})=\vec{A}$$

و با توجه به مسئله (۱ – ۲۲) می‌دانیم که:

$$\vec{\nabla}f(r)=\frac{\vec{r}}{r}\frac{df}{dr} \quad \Rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right)=\frac{-3}{r^4}\frac{\vec{r}}{\vec{r}}=\frac{-3}{r^5}\vec{r}$$

بنابراین:

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5}\vec{r}-\frac{\vec{p}}{r^3}\right]$$

حکایت «میکل آنژ» و فرشته:

روزی میکل آنژ با کمک عده‌ای سنگ سیاه و نسبتاً بزرگی را بر روی زمین می‌غلطاند تا به طرف منزل خود ببرد. یکی از دوستان میکل آنژ نزدیک او آمد و پرسید: «با این سنگ سیاه چه می‌کنی؟» میکل آنژ گفت: «فرشته‌ای درون او اسیر است که می‌خواهم او را نجات دهم.» دوست میکل‌آنژ با ناباوری از او خداحافظی کرد و رفت. چند ماه بعد ، دوست میکل‌آنژ به مهمانی او آمد و مجسمه‌ی سنگی فرشته بسیار زیبایی را در اتاق او دید. با حیرت و تحسین از میکل‌آنژ پرسید: «این مجسمه چقدر زیباست از کجا آورده‌ای؟» میکل‌آنژ گفت: «از درون همان سنگ سیاه در آوردم!»

بی شک ، در همسایگی و مجاورت این انسان‌های معطّر و متبرک روح و جسممان دارای فیلترهایی نامریی می‌شوند. بدون آن که خودمان بفهمیم و برای آن که فرشته درونمان را تجسّم بخشند ، برای وجودمان فیلتر می‌گذارند:

یک فیلتر برای ذهنمان ، که به هر چیزی نیندیشیم !
یک فیلتر برای چشمانمان ، که هر چیزی را نبینیم !
یک فیلتر برای گوشمان ، که هر سخنی را نشنویم !
یک فیلتر برای زبانمان ، که هر سخنی را بدون تامل و تفکر نگوییم !
یک فیلتر برای دلمان ، که هر کسی را رخصت ورود به آن ندهیم !
یک فیلتر برای روحمان ، که انسانی دگر اندیش باشیم !

physicsclass.blogsky.com

۳

حل مسائل الکتروستاتیک

91/10/19

Physicsclass.blogsky.com

معادلهٔ پواسون

با استفاده از شکل دیفرانسیلی قانون گاوس برای میدان الکتروستاتیکی $\vec{E}$ می‌توان به معادلهٔ دیفرانسیلی به نام معادلهٔ پواسون دست یافت:

(۳-۱)

$$\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\ ,\ \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi\ \to\ \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi=\frac{-\rho}{\varepsilon_0}\ \to\ \nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

که ∇^2، یک عملگر دیفرانسیل نرده‌ای به نام لاپلاسی است.

معادلهٔ پواسون معادله‌ای است با مشتقات جزیی که با دردست داشتن بستگی تابع $\rho(x,y,z)$ و شرایط مرزی مناسب می‌توان آن را حل کرد.

شکل $\nabla^2\varphi$ در دستگاههای مختصات مختلف به صورت زیر است:

(۳-۲) (دستگاه مختصات قائم)

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

(۳-۳) (دستگاه مختصات کروی)

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi^2}$$

r بزرگی بردار شعاعی نسبت به مبداء مختصات و θ زاویهٔ قطبی است.

(۳-۴) (دستگاه مختصات استوانه‌ای)

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

r فاصلهٔ عمودی از محور استوانه و θ زاویهٔ سمت در حول این محور است.

معادلهٔ لاپلاس

در جاهایی که چگالی بار صفر است، معادلهٔ پواسن به معادلهٔ لاپلاس تبدیل می‌شود.

(۳-۵)

$$\nabla^2\varphi=0$$

روش اول حل معادلهٔ لاپلاس، پیداکردن یک پاسخ عمومی به وسیلهٔ ترکیب پاسخهای خصوصی (توابع پایه) معادله در دستگاه مختصاتی که تقارن موجود در مسئله آن را ایجاب می‌کند. روش دوم روش تصویرهاست.

پاسخ معادلهٔ لاپلاس دارای دو خاصیت مهم است که در دو قضیهٔ زیر آنها را بیان می‌کنیم:

قضیه اول: اگر φ_1، φ_2، ...، φ_n همگی پاسخهای معادلهٔ لاپلاس باشند، آنگاه:

(۳-۶)

$$\varphi=C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+C_3\varphi_3+\cdots\cdots+C_n\varphi_n$$

که در آن Cها ثابتهای اختیاری‌اند، نیز پاسخ این معادله خواهد بود.

قضیهٔ دوم: (قضیهٔ یکتایی): دو پاسخ معادلهٔ لاپلاس که در شرایط مرزی یکسانی صدق کنند، یا با هم برابرند، یا اختلافشان حداکثر یک عدد ثابت جمعی است.

معادلهٔ لاپلاس با یک متغیر مستقل

اگر φ فقط تابعی از یک متغیر باشد، معادلهٔ لاپلاس به یک معادلهٔ دیفرانسیلی معمولی تبدیل می‌شود. در مختصات قائم اگر φ فقط تابعی از x باشد، معادلهٔ لاپلاس و پاسخ عمومی آن به صورت زیر است:

(۳-۷)

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=0\ ,\ \ \varphi(x)=ax+b$$

که a و b ثابتهایی هستند که با در نظر گرفتن شرایط مرزی بدست می‌آیند.

در مختصات کروی اگر φ تابعی از r باشد، معادلهٔ لاپلاس و پاسخ عمومی آن به صورت زیر است:

(۳-۸)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)=0\ ,\ \ \varphi(r)=\frac{-a}{r}+b$$

پاسخ‌های معادلهٔ لاپلاس در مختصات کروی (هماهنگهای منطقه‌ای)

برای مسائلی در مختصات کروی که φ به زاویهٔ سمتی ϕ بستگی ندارد و فقط تابعی از r و θ، $\varphi(r,\theta)$ است (r بردار شعاعی از مبداء ثابت O و θ زاویهٔ قطبی) معادلهٔ لاپلاس به صورت زیر نوشته می‌شود:

(۳-۹)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=0$$

پاسخ‌های این معادله با استفاده از روش جداسازی متغیرها، $\varphi(r,\theta)=Z(r)P(\theta)$، به صورت زیر است که به هماهنگهای منطقه‌ای معروف هستند:

(۳-۱۰)
$$\varphi_n=r^n P_n(\theta) \quad \text{یا} \quad \varphi_n=r^{-(n+1)}P_n(\theta)$$

که P_n چندجمله‌ایهای لژاندر است و n عدد صحیح مثبت یا صفر است.

(۳-۱۱)
$$P_0(\theta)=1 \;,\; P_1(\theta)=\cos\theta \;,\; P_2(\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$$
$$,P_3(\theta)=\frac{1}{2}(5\cos^3\theta-3\cos\theta),\;......$$

هماهنگهای منطقه‌ای مجموعه‌ای از توابع را تشکیل می‌دهند که برای حل معادلهٔ لاپلاس با مرزهای کروی و تقارن سمتی مناسب‌اند.

کرهٔ رسانا در میدان الکتریکی یکنواخت

کرهٔ رسانای بی‌بار در میدان الکتریکی $\vec{E}_0$ که در آغاز یکنواخت است نمونه‌ای از مسائلی است که در آن پتانسیل به زاویهٔ سمتی ϕ بستگی ندارد و می‌توان آن را به صورت مجموعه‌ای از هماهنگهای منطقه‌ای نوشت. با فرض مبداء مختصات بر مرکز کره و محور z در راستای میدان الکتریکی یکنواخت و در نظر گرفت شرایط مرزی مسئله، پتانسیل به صورت زیر بدست می‌آید:

(۳-۱۲)
$$\varphi(r,\theta)=\varphi_0-E_0\, r\cos\theta+E_0\, a^3 r^{-2}\cos\theta \qquad r\ge a$$
$$\varphi(a,\theta)=\varphi_0$$

و میدان الکتریکی در تمام نقاط فضا به صورت زیر است:

(۳-۱۳)
$$\left.\begin{aligned} E_r&=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=E_0(1+2\frac{a^3}{r^3})\cos\theta \\ E_\theta&=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-E_0(1-\frac{a^3}{r^3})\sin\theta \end{aligned}\right\} r\ge a$$

و چگالی سطح بار روی کرهٔ رسانا برابر است با:

(۳-۱۴)
$$\sigma(\theta)=\varepsilon_0 E_r\big|_{r=a}=3\varepsilon_0 E_0\cos\theta$$

پاسخهای معادلهٔ لاپلاس در مختصات استوانه‌ای (هماهنگهای استوانه‌ای)

معادلهٔ لاپلاس در مختصات استوانه‌ای برای مسائلی که در آنها پتانسیل به مختصهٔ z بستگی ندارد، به صورت زیر است:

(۳-۱۵)
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\varphi}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0$$

که با استفاده از روش جداسازی متغیرها $\varphi=Y(r)S(\theta)$، پاسخهای معادلهٔ لاپلاس یا به اصطلاح هماهنگهای استوانه‌ای به صورت زیر نتیجه می‌شوند:

(۳-۱۶)
$$\begin{matrix} 1 & \ln r \\ r^n\cos n\theta & r^{-n}\cos n\theta \\ r^n\sin n\theta & r^{-n}\sin n\theta \end{matrix}$$

این توابع مجموعهٔ کاملی برای متغیرهای r و θ در مختصات استوانه‌ای تشکیل می‌دهند و پتانسیل $\varphi(r,\theta)$ را می‌توان مطابق قضیهٔ اول به صورت برهم نهی هماهنگهای استوانه‌ای نوشت.

معادلهٔ لاپلاس در مختصات قائم

در مختصات قائم می‌توان با استفاده از روش جداسازی متغیرها، $\varphi(x,y,z)=f_1(x)f_2(y)f_3(z)$، معادلهٔ لاپلاس را به سه معادلهٔ سادهٔ زیر تبدیل کرد:

(۳-۱۷)
$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2f_1}{dx^2}-(k+m)f_1=0 \\ &\frac{d^2f_2}{dy^2}+m f_2=0 \\ &\frac{d^2f_3}{dz^2}+k f_3=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\to\varphi(x,y,z)=Ae^{-(k+m)^{\frac{1}{2}}x}\cos m^{\frac{1}{2}}y\cos k^{\frac{1}{2}}z$$

پتانسیل بدست آمده یکی از پاسخهای ممکن برای تابع $\varphi(x,y,z)$ است، هفت پاسخ مستقل دیگر را برای یک زوج ثابت جداسازی (k,m) با یکی از جانشانیهای زیر می‌توان بدست آورد:

(۳-۱۸)
$$+(k+m)^{\frac{1}{2}}x \quad\to\quad -(k+m)^{\frac{1}{2}}x$$
$$\sin m^{\frac{1}{2}}y \quad\to\quad \cos m^{\frac{1}{2}}y$$
$$\sin k^{\frac{1}{2}}z \quad\to\quad \cos k^{\frac{1}{2}}z$$

یک وضعیت فیزیکی جالب توجه در این مورد زمانی است که هر دو ثابت جداسازی صفر باشد، بنابراین با توجه به سه معادلهٔ (۳-۱۷) داریم:

(۳-۱۹)
$$\varphi(x,y,z)=A_1xyz+A_2xy+A_3yz+A_4xz+A_5x+A_6y+A_7z+A_8$$

که A ها اعداد ثابت دلخواهی هستند. چنین تابع پتانسیلی را می‌توان برای سه صفحهٔ رسانا که یکدیگر را با زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند، به کاربرد. مثلاً برای سه صفحهٔ رسانا و هم‌پتانسیل xy، yz، xz، پتانسیل به صورت زیر است:

(۳-۲۰)
$$\varphi(x,y,z)=A_1xyz+A_8$$

تصویرهای الکتروستاتیکی

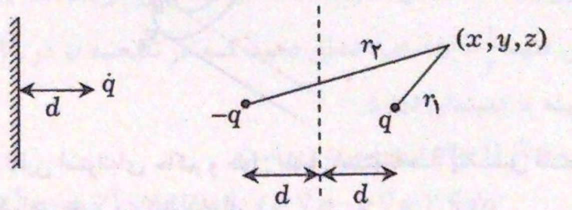
همانطور که قبلاً گفته شد روش دوم برای حل معادلهٔ لاپلاس، روش تصویرهاست. در این یک پیکربندی از بارهای تصویری مجازی در خارج از V چنان طرح‌ریزی می‌شود که میدان پتانسیل ناشی از این بارها و بارهای حقیقی داخل V، روی مرزهای مفروض V در شرایط مرزی مربوط به φ صدق کند. قضیهٔ یکتایی تضمین می‌کند که

Physicsclass.blogsky.com

میدان داخل V میدان صحیحی است. این روش را می‌توان در موارد معدودی به کار برد که در آنها تقارن مناسب وجود دارد. (مثل بار نقطه‌ای در مقابل صفحهٔ رسانا)

بار نقطه‌ای در نزدیکی یک صفحهٔ رسانا

مسئله یک بار نقطه‌ای q در نزدیکی یک صفحهٔ رسانای نامتناهی معادل مسئله دو بار نقطه‌ای $(-q,q)$ که به فاصلهٔ $2d$ از یکدیگر قرار دارند، است.



$$\varphi(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \qquad (۲۱-۳)$$

$$r_2=\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_1=\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

این پتانسیل نه تنها در همهٔ نقاط در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند، بلکه مقدار آن روی عمودمنصف خط واصل دوبار صفر می‌شود و چون پاسخ‌های معادلهٔ لاپلاس منحصر به فرد هستند، پتانسیل φ، پتانسیل صحیح برای سراسر نیم فضای سمت راست صفحهٔ رساناست.

بار $-q$، تصویر بار q است. چگالی بار سطحی σ روی صفحه برابر است با:

$$\sigma(y,z)=\varepsilon_0 E_x\Big|_{x=0}=-\frac{qd}{2\pi(d^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (۲۲-۳)$$

با انتگرال‌گیری از σ روی تمام سطح بار $-q$ (برابر با بار تصویری مجازی) بدست می‌آید.

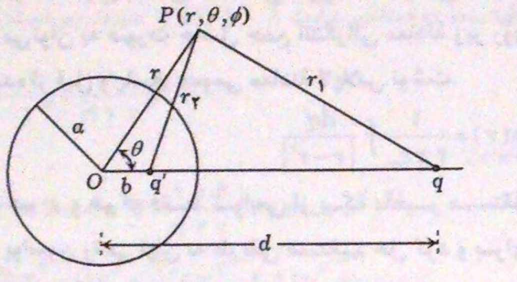
بار نقطه‌ای و کرهٔ رسانا

پتانسیل برای مسئله بار نقطه‌ای در نزدیکی یک کرهٔ رسانا به صورت زیر است:

$$\varphi(r,\theta,\varphi)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \qquad (۲۳-۳)$$

$$r_1=[r^2+d^2-2rd\cos\theta]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_2=[(r^2+b^2-2rb\cos\theta]^{\frac{1}{2}}$$



با اعمال شرایط مرزی مکان و مقدار بار تصویری به صورت زیر است:

$$b=\frac{a^2}{d}\quad ,\quad q'=-\frac{a}{d}q \qquad (۲۴-۳)$$

اگر پتانسیل کره مقدار غیر صفری باشد به بار تصویری دیگر q'' در مرکز کره احتیاج است، بنابراین پتانسیل در همهٔ نقاط خارج از کره به صورت زیر است:

$$\varphi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_1}+\frac{q'}{r_2}+\frac{q''}{r}\right] \qquad (۲۵-۳)$$

پتانسیل کرهٔ رسانا:

$$\varphi(a,\theta,\phi)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q''}{a} \qquad (۲۶-۳)$$

و چگالی بار سطحی روی کره:

$$\sigma(\theta,\phi)=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=a} \qquad (۲۷-۳)$$

و مقدار بار کل Q روی سطح کره برابر است با:

$$Q=q'+q'' \qquad (۲۸-۳)$$

دستگاه رساناها و ضرایب پتانسیل

هنگامی که همهٔ بارها روی سطوح رساناها قرار دارند، معادلهٔ لاپلاس حکم می‌کند که پتانسیل رساناها توابعی خطی از بار رساناها باشند:

$$\varphi_i=\sum_j P_{ij}Q_j \qquad (۲۹-۳)$$

که P_{ij} را ضرایب پتانسیل می‌نامند.

حل عددی مسائل الکتروستاتیک

دو روش مفید برای حل عددی معادلهٔ لاپلاس عبارتند از: روش تفاضلات متناهی و روش عناصر متناهی. در روش تفاضلهای متناهی، پتانسیل در نقاط شبکه در ناحیهٔ مورد نظر با یک فرآیند تکرار تعیین می‌شود، در روش عناصر متناهی، ناحیهٔ مورد نظر به زیر ناحیه‌هایی تقسیم می‌شود که در آنها تقریبهای تحلیلی به عنوان اصل موضوعی تلقی می‌شود و سپس آنها را با پارامترهای مشخص بهینه‌سازی می‌کنند.

پاسخ‌های معادلهٔ پواسون

معادلهٔ لاپلاس در آن دسته از مسائل الکتروستاتیک بکار می‌رود که در آنها همهٔ بار روی سطوح رساناها قرار گرفته و یا به صورت بارهای نقطه‌ای و یا بارهای خطی متمرکز است. ولی در مسائلی که بار با تابع معلوم $\rho(x,y,z)$ داده شده و بقیهٔ بار (بار القایی) روی سطوح

Physicsclass.blogsky.com

رساناها قرار دارد، احتیاج به حل معادلهٔ پواسون است. پاسخ عمومی این معادله را می‌توان به صورت حاصل جمع انتگرالی معادلهٔ زیر روی بار مشخص شده از قبل و پاسخ عمومی معادلهٔ لاپلاس نوشت.

$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq'}{|r-r'|} \qquad (۳-۳۰)$$

در مواردی که هم ρ و هم φ فقط توابعی از یک متغیر مستقل باشند، معادلهٔ پواسون را می‌توان به طریقی مستقیم حل کرد و برای پیدا کردن دو ثابت انتگرال‌گیری از دو مطلب زیر استفاده کرد:

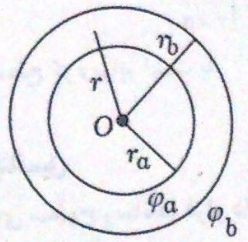
۱. استفاده از قانون گاوس برای میدان الکتریکی در شعاع معین

۲. استفاده از این واقعیت که: $r\to\infty \;\Rightarrow\; \varphi\to 0$

مسائل فصل سوم

۳-۱- دو پوستهٔ رسانای باردار کروی هم‌مرکز به شعاعهای r_a و r_b به ترتیب دارای پتانسیلهای φ_a و φ_b هستند. اگر $r_b>r_a$ باشد، مطلوب است پتانسیل در نقاط واقع میان دو پوسته و در نقاط $r>r_b$.

حل:



با توجه به تقارن مسئله، پتانسیل فقط به صورت شعاعی تغییر می‌کند ($\varphi=\varphi(r)$)، بنابراین:

$$\nabla^2\varphi(r)=0 \;\rightarrow\; \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)=0 \;\rightarrow\; r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}=A_1$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{A_1}{r^2} \;\rightarrow\; \varphi(r)=-\frac{A_1}{r}+A_2 \qquad (1)$$

برای بدست آوردن ثابتهای A_1 و A_2، شرایط مرزی مسئله را اعمال می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(r=r_a)=\varphi_a &\rightarrow \frac{-A_1}{r_a}+A_2=\varphi_a\\ \varphi(r=r_b)=\varphi_b &\rightarrow \frac{-A_1}{r_b}+A_2=\varphi_b\end{aligned}\right\}\rightarrow \quad A_1=\frac{\varphi_b-\varphi_a}{r_b-r_a}r_a r_b,\quad A_2=\frac{r_b\varphi_b-r_a\varphi_a}{r_b-r_a}$$

با جایگذاری A_1 و A_2، در رابطهٔ (1) داریم:

$$\varphi(r)=\frac{-(\varphi_b-\varphi_a)r_a r_b}{(r_b-r_a)}\frac{1}{r}+\frac{r_b\varphi_b-r_a\varphi_a}{r_b-r_a} \qquad r_a\le r\le r_b$$

پتانسیل $\varphi(r)$ برای نقاط $r\ge r_b$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\varphi(r\to\infty)=0 \;\rightarrow\; A_2=0$$

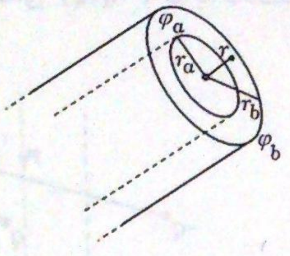
$$\varphi(r=r_b)=\varphi_b \;\rightarrow\; \frac{-A_1}{r_b}=\varphi_b \;\rightarrow\; A_1=-\varphi_b r_b$$

با جایگذاری A_1 و A_2 در رابطهٔ (1) داریم:

$$\varphi(r)=\frac{\varphi_b r_b}{r} \qquad r\ge r_b$$

۳-۲- دو پوستهٔ طویل استوانه‌ای باردار و هم‌محور به شعاعهای r_a و r_b به ترتیب دارای پتانسیلهای φ_a و φ_b هستند. پتانسیل را در نقاط میان دو پوسته پیدا کنید.

حل:



به دلیل تقارن استوانه‌ای حاکم و طول طویل استوانه‌ها، پتانسیل فقط به صورت شعاعی تغییر می‌کند، بنابراین:

$$\varphi=\varphi(r)\rightarrow\nabla^2\varphi(r)=0 \;\rightarrow\; \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)=0 \;\rightarrow\; r\frac{d\varphi}{dr}=A$$

$$\frac{d\varphi}{dr}=\frac{A}{r} \;\rightarrow\; \varphi(r)=A_1\ln r+A_2 \qquad (1)$$

برای بدست آوردن ثابتهای A_1 و A_2، شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(r=r_a)=\varphi_a &\rightarrow A_1\ln r_a+A_2=\varphi_a\\ \varphi(r=r_b)=\varphi_b &\rightarrow A_1\ln r_b+A_2=\varphi_b\end{aligned}\right\}\rightarrow A_1=\frac{\varphi_a-\varphi_b}{\ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)}$$

$$A_2=\frac{\varphi_b\ln r_a-\varphi_a\ln r_b}{\ln\frac{r_a}{r_b}}$$

با جایگذاری A_1 و A_2 در رابطهٔ (1)، پتانسیل $\varphi(r)$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\varphi(r)=\frac{\varphi_a-\varphi_b}{\ln\frac{r_a}{r_b}}\ln r+\left(\frac{\varphi_b\ln r_a-\varphi_a\ln r_b}{\ln\frac{r_a}{r_b}}\right)$$

$$=\frac{1}{\ln\frac{r_a}{r_b}}\left[\varphi_a\ln\frac{r}{r_b}-\varphi_b\ln\frac{r}{r_a}\right] \qquad r_a\le r\le r_b$$

۳-۳- اگر φ_1 یکی از پاسخهای معادلهٔ لاپلاس باشد، ثابت کنید که مشتق جزئی φ_1 نسبت به یک یا چند مختصه از مختصات قائم (نظیر $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}$ و مانند آنها) نیز پاسخ معادلهٔ لاپلاس است.

حل: φ_1 پاسخی برای معادلهٔ لاپلاس است، بنابراین:

$$\nabla^2\varphi_1=0$$

$$\nabla^2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\varphi_1)=\frac{\partial}{\partial x}(0)=0$$

$$\nabla^2\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\nabla^2\varphi_1)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(0)=0$$

$$\nabla^2\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\nabla^2\varphi_1)=0$$

PhysicsClass.blogsky.com

بنابراین مشتق جزئی φ_1 نسبت به یک یا چند مختصه از مختصات قائم پاسخ معادلهٔ لاپلاس است.

۳-۴ - فرض کنید φ در تمامی ناحیهٔ V_0، در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. (الف) ثابت کنید که مقدار φ در هر نقطهٔ O برابر است با میانگین مقادیر آن بر روی سطح کره‌ای به مرکز O که تماماً در V_0 قرار داشته باشد.

$$\varphi(O)=\frac{1}{4\pi R^2}\oint \varphi\, da$$

در این رابطه R شعاع کره است. (راهنمایی: در معادلهٔ (۱-۵۷) فرض کنید $\psi=\frac{1}{r}$). (ب) نشان دهید که در نتیجه φ در V_0 هیچ بیشینه یا کمینه‌ای ندارد.

حل: معادلهٔ (۱-۵۷) به صورت زیر است:

$$\int_V [\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi]\,dV=\oint_S(\psi\vec\nabla\varphi-\varphi\vec\nabla\psi).\hat n\, da$$

با توجه به صورت مسئله و راهنمایی داریم:

$$\nabla^2\varphi=0\ ,\quad \psi=\frac{1}{r}\ ,\quad \vec E=-\vec\nabla\varphi$$

نقطه O مرکز کره را در مبداء دستگاه مختصات در نظر می‌گیریم، بنابراین:

$$\int_V\left[0-\varphi\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\right]dV=\oint_S\left(\frac{1}{r}(-\vec E)-\varphi\vec\nabla\frac{1}{r}\right).\hat n\, da$$

می‌دانیم که:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta(r)\ ,\quad \vec\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\left(-\frac{1}{r^2}\right)\hat r$$

$$\int_V\varphi(r)4\pi\delta(r)\,dV=-\oint_S\frac{\vec E.\hat n}{R}da+\oint_S\frac{\varphi}{R^2}da$$

با استفاده از قانون گاوس و خاصیت تابع دلتای دیراک $\left(\int f(\vec r)\delta(r-0)\,dV=f(0)\right)$، داریم:

$$4\pi\varphi(0)=\frac{-q}{\varepsilon_0 R}+\frac{1}{R^2}\oint_S\varphi\, da$$

و چون:

$$\nabla^2\varphi=\frac{-\rho}{\varepsilon_0}\to\rho=0\to q=0$$

بنابراین:

$$\varphi(0)=\frac{1}{4\pi R^2}\oint_{S\ (\text{سطح کره})}\varphi\, da$$

۳-۵ - تابع

$$F(u)=(1-2xu+u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

را تا جملهٔ u^3، به صورت سری تایلور بر حسب u بسط دهید. توجه کنید که ضرایب این بسط، چهار چندجمله‌ای نخستین از چندجمله‌ایهای لژاندر $P_n(x)$ هستند. در واقع $F(u)$ تابع مولد تمام چندجمله‌ایهای لژاندر است:

$$F(u)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)u^n$$

حل: بسط دوجمله‌ای عبارت $(1+y)^{-\frac{1}{2}}$ به صورت زیر است:

$$(1+y)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\frac{3}{2}y^2+\cdots$$

بنابراین:

$$F(u)=1-\frac{1}{2}(-2xu+u^2)+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\frac{3}{2}(-2xu+u^2)^2+\cdots=$$

$$=1+xu+\frac{1}{2}(3x^2-1)u^2+\frac{1}{2}(5x^3-3x)u^3+\cdots$$

$$=P_0(x)+P_1(x)u+P_2(x)u^2+P_3(x)u^3+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)u^n$$

۳-۶ - نشان دهید که نیمی از هماهنگهای منطقه‌ای با مشتق‌گیری پی‌درپی از r^{-1} نسبت به مختصهٔ قائم z تولید می‌شوند. $(z=r\cos\theta)$.

حل:

$$r^{-1}=[x^2+y^2+z^2]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\to\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}[x^2+y^2+z^2]^{-\frac{1}{2}}=\frac{-z}{r^3}=\frac{-r\cos\theta}{r^3}$$

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}=-r^{-2}\cos\theta=-r^{2}P_1(\cos\theta)$$

$$\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-z}{r^3}\right)=-\frac{1}{r^3}-z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\right)=-\frac{1}{r^3}-z\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\right)\frac{\partial r}{\partial z}=$$

$$-\frac{1}{r^3}+\frac{3z}{r^4}\left(\frac{z}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}$$

$$=-\frac{1}{r^3}+\frac{3r^2\cos^2\theta}{r^5}=\frac{3\cos^2\theta-1}{r^3}=r^3(2P_2\cos\theta)$$

و به همین ترتیب می‌توان هماهنگهای منطقه‌ای دیگر را به دست آورد.

۳-۷ - $\nabla^2\varphi$ در مختصات استوانه‌ای (معادلهٔ ۳-۸) را از صورت آن در مختصات قائم (معادلهٔ ۳-۶) به کمک تغییر متغیر $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ به دست آورید.

حل: لاپلاسی φ در مختصات قائم به صورت زیر است (معادلهٔ ۳-۶):

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\qquad(1)$$

و در مختصات استوانه‌ای داریم:

$$r^2=x^2+y^2\ ,\quad x=r\cos\theta\ ,$$

$$y=r\sin\theta\ ,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}\ \to\ \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

بنابراین با توجه به قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\\[2mm]\dfrac{\partial}{\partial y}=\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{\partial\theta}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\end{cases}$$

با توجه به روابط بالا داریم:

physicsclass.blogsky.com

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\frac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta \quad ,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{(-\frac{y}{x^2})}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{-r\sin\theta}{r^2}=\frac{-\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\frac{r\sin\theta}{r}=\sin\theta \quad ,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{(\frac{1}{x})}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{r\cos\theta}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r}$$

بنابراین $\frac{\partial}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}$ برابر است با:

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\\ \frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\end{cases}$$

و برای محاسبهٔ مشتق دوم آنها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x})=(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta})(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta})$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta})$$

$$\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r})+\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta})$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}-\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta\partial r}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial \theta\partial r}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \qquad (2)$$

و به همین ترتیب برای $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ داریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \qquad (3)$$

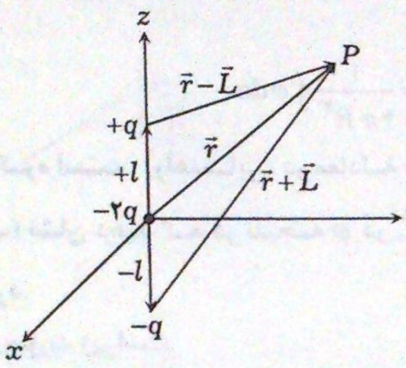
با جایگذاری روابط (۲) و (۳) در لاپلاسی φ داریم:

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

۳-۸ - یک چارقطبی محوری متشکل از مجموعهٔ بارهای نقطه‌ای q، $-2q$ و q واقع بر محور z، در فواصل L و ۰ و $-L$ از مبداء مختصات. (الف) پتانسیل این چارقطبی را حساب کنید. (ب) پتانسیل را فقط در فواصل $r>>L$ حساب کنید. (ج) نشان دهید که پتانسیل با یکی از هماهنگهای منطقه‌ای متناسب است.

حل:



مانند مسئله (۲-۳۴) عمل می‌کنیم:

$$\varphi(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{L}|}-\frac{2}{|\vec{r}|}+\frac{1}{|\vec{r}+\vec{L}|}\right] \qquad (1)$$

$$|\vec{r}-\vec{L}|^{-1}=(r^2-2\vec{r}.\vec{L}+L^2)^{-\frac{1}{2}}=r^{-1}(1-2\frac{\vec{r}.\vec{L}}{r^2}+\frac{L^2}{r^2})^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=r^{-1}\left[1-\frac{1}{2}(\frac{-2\vec{r}.\vec{L}}{r^2}+\frac{L^2}{r^2})+(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\frac{1}{2!}(\frac{-2\vec{r}.\vec{L}}{r^2}-\frac{L^2}{r^2})^2+\cdots\right.$$

$$=\frac{1}{r}\left[1+\frac{\vec{r}.\vec{L}}{r^2}-\frac{L^2}{2r^2}+\frac{3}{8}(\frac{2\vec{r}.\vec{L}}{r^2})^2+\cdots\cdots\right] \qquad (2)$$

و به همین ترتیب:

$$|\vec{r}+\vec{L}|^{-1}=\frac{1}{r}\left[1-\frac{\vec{r}.\vec{L}}{r^2}-\frac{L^2}{2r^2}+\frac{3}{8}(\frac{2\vec{r}.\vec{L}}{r^2})^2+\cdots\cdots\right] \qquad (3)$$

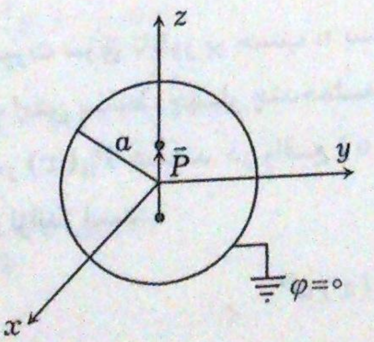
با جایگذاری (۲) و (۳) در رابطهٔ (۱) داریم:

$$\varphi(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-L^2}{r^3}+\frac{3(\vec{L}.\vec{r})^2}{r^5}+\cdots\cdots\right]$$

$$\underset{r>>L}{\cong}\frac{qL^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[3\cos^2\theta-1]=\frac{qL^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}P_2(\cos\theta)$$

۳-۹ - فرض کنید که یک دوقطبی نقطه‌ای در مرکز یک پوستهٔ رسانای کروی متصل به زمین قرار گرفته است. پتانسیل را در داخل پوسته پیدا کنید. {راهنمایی: برای برآوردن شرایط مرزی بر روی پوسته، از هماهنگهای منطقه‌ای که در مبداء منتظم‌اند، استفاده کنید.}

حل:



Physicsclass.blogsky.com

با توجه به شکل (دو قطبی بر روی محور z فرض می‌شود) تقارن سمتی بر مسئله حاکم است، بنابراین از هماهنگهای منطقه‌ای برای پتانسیل $\varphi(r,\theta)$ استفاده می‌کنیم:

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}[A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta)$$

از شرایط مرزی حاکم برای تعیین ضرایب A_n و B_n استفاده می‌کنیم:

$$\varphi(r=a)=0 \to \sum_{n=0}^{\infty}[A_n a^n+B_n a^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta)=0$$

$$\varphi(r\to 0)=\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\to \sum_{n=0}^{\infty}B_n r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)=\frac{PP_1(\cos\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

و چون چندجمله‌ای‌های لژاندر از یکدیگر مستقل هستند، بنابراین می‌توان ضرایب آنها را در دو طرف تساوی برابر قرار داد:

$$A_n a^n+B_n a^{-(n+1)}=0$$

$$\frac{B_1}{r^2}=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \to B_1=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$B_n r^{-(n+1)}=0 \to B_n=0 \quad n=0,\ n\geq 2$$

$$A_1 a+B_1 a^{-2}=0 \to A_1=\frac{-B_1}{a^3}=\frac{-P}{4\pi\varepsilon_0 a^3},$$

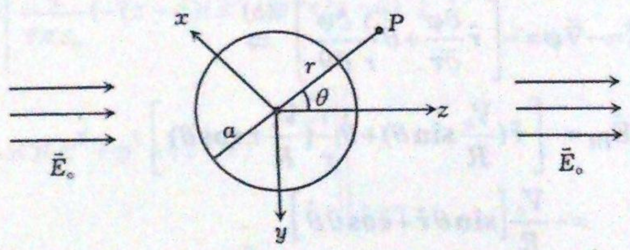
$$A_n=0 \quad n=0,\ n\geq 2$$

بنابراین:

$$\varphi(r,\theta)=\left(\frac{-P}{4\pi\varepsilon_0 a^3}r+\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}r^{-2}\right)\cos\theta$$

۳-۱۰- یک کرهٔ رسانای بی‌بار در یک میدان الکتریکی در آغاز یکنواخت قرار گرفته است. (الف) نشان دهید که پتانسیل ناشی از کره برابر است با پتانسیل یک دوقطبی نقطه‌ای. (ب) گشتاور دوقطبی القایی کره را پیدا کنید.

حل:



الف) با توجه به تقارن سمتی مسئله، پتانسیل $\varphi(r,\theta)$ را با استفاده از هماهنگهای منطقه‌ای به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\nabla^2\varphi(r,\theta)=0$$

$$\to \varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}[A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta)=0$$

با استفاده از شرایط مرزی، ثابتهای A_n و B_n را پیدا می‌کنیم:

$$\varphi(r=a)=0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}[A_n a^n+B_n a^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta)=0$$

$$\to A_n a^n+B_n a^{-(n+1)}=0$$

$$\varphi(r\to\infty)=-E_0 z=-E_0 r\cos\theta=-E_0 r P_1(\cos\theta)$$

$$\to \sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta)=-E_0 r P_1(\cos\theta) \to \begin{cases}A_1=-E_0\\ A_n=0 \quad n=0,\ n\geq 2\end{cases}$$

$$-E_0 a+B_1 a^{-2}=0 \to \begin{cases}B_1=E_0 a^3\\ B_n=0 \quad n=0,\ n\geq 2\end{cases}$$

بنابراین:

$$\varphi(r,\theta)=(-E_0 r+E_0 a^3 r^{-2})\cos\theta$$

$$=-E_0 r\cos\theta+\frac{E_0 a^3\cos\theta}{r^2}=\varphi_1+\varphi_2$$

$\varphi_1=-E_0 r\cos\theta$، پتانسیل ناشی از میدان خارجی

$\varphi_2=\dfrac{E_0 a^3\cos\theta}{r^2}$، پتانسیل ناشی از کره

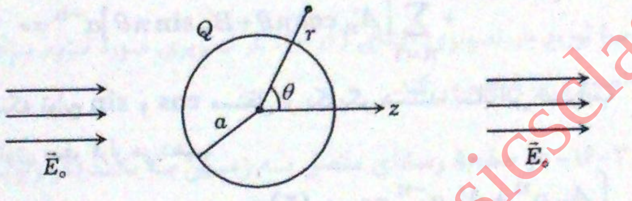
$\varphi_3=\dfrac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\dfrac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$، پتانسیل ناشی از یک دوقطبی نقطه‌ای

$$\to P=4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0$$

از مقایسه φ_2 و φ_3، گشتاور دوقطبی القایی کره (P) حاصل می‌شود.

۳-۱۱- یک کرهٔ رسانا به شعاع a را که حاوی بار کل Q است، در یک میدان الکتریکی E_0 که در آغاز یکنواخت است قرار می‌دهیم. پتانسیل را در تمام نقاط واقع در خارج از کره پیدا کنید.

حل:



با توجه به تقارن سمتی حاکم، پتانسیل به صورت زیر است:

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}[A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta)$$

با توجه به شرایط مرزی، می‌توان ثابتهای A_n و B_n را بدست آورد:

$$\varphi(r=a)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \to \begin{cases}A_0+B_0 a^{-1}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\\ A_n a^n+B_n a^{-(n+1)}=0\end{cases}$$

$$\varphi(r\to\infty)=-E_0 z=-E_0 r\cos\theta \to A_1=-E_0,\ A_n=0 \quad n\neq 1$$

$$\to B_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$A_1=-E_0 \to -E_0 a+B_1 a^{-2}=0 \to B_1=E_0 a^3,\ B_n=0 \quad n\neq 0,1$$

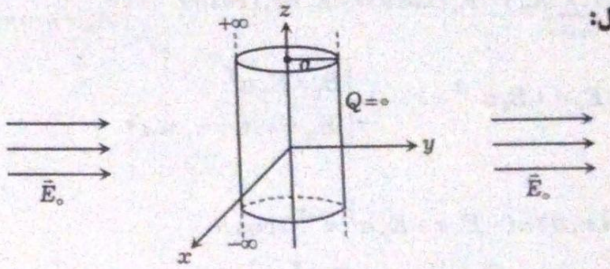
بنابراین:

$$\varphi(r,\theta)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}-E_0 r\cos\theta+\frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta$$

physicsclass.blogsky.com

۳-۱۲ - یک استوانهٔ رسانای طویل به شعاع a را که بار خالص ندارد، در میدان الکتریکی E_0 که در آغاز یکنواخت است، قرار می‌دهیم. راستای E_0 بر محور استوانه عمود است. (الف) پتانسیل را در نقاط خارج استوانه پیدا کنید. (ب) چگالی بار را در سطح استوانه محاسبه کنید.

حل:



(الف) با توجه به اینکه پتانسیل به مختصهٔ z بستگی ندارد، می‌توان از هماهنگهای استوانه‌ای برای بیان پتانسیل استفاده کرد:

$$\nabla^2\varphi(r,\theta)=0 \to \varphi(r,\theta)$$
$$=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right]r^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A'_n\cos n\theta+B'_n\sin n\theta\right]r^{-n}$$

برای بدست آوردن ضرایب ثابت A_n و B_n و...، شرایط مرزی مسئله را اعمال می‌کنیم:

(۱) به دلخواه $A_0=0$ فرض می‌کنیم ، $Q=0 \to B_0=0$

$$Q(a,\theta)=0\to\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right]a^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A'_n\cos n\theta+B'_n\sin n\theta\right]a^{-n}=0$$

به دلیل اینکه توابع sin و cos مستقل از یکدیگر هستند، بنابراین ضرایب آنها را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}A_n a^n+A'_n a^{-n}=0 & (۲)\\ B_n a^n+B'_n a^{-n}=0 & (۳)\end{cases}$$

$$\varphi(r\to\infty)=-E_0 y=-E_0 r\sin\theta$$
$$\to\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right]r^n=-E_0 r\sin\theta$$
$$\to A_n=0\ \ \forall n\ ,\ B_1=-E_0\ ,\ B_n=0\ \ n\neq 1 \quad (۴)$$
$$(۲),(۴)\to A'_n=0\ \ \forall n$$
$$(۳),(۴)\to B'_1=+E_0 a^2\ ,\ B'_n=0\ \ n\neq 1$$

بنابراین:

$$\varphi(r,\theta)=-E_0\sin\theta\, r+E_0 a^2\sin\theta\, r^{-1}$$

(ب) می‌دانیم در نزدیکی سطح رسانا میدان برابر است با: $E_1=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\sigma=\varepsilon_0 E_r=-\varepsilon_0\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a}$$
$$=-\varepsilon_0\left.(-E_0\sin\theta-E_0 a^2\sin\theta\, r^{-2})\right|_{r=a}=2\varepsilon_0 E_0\sin\theta$$

۳-۱۳ - یک پوستهٔ استوانه‌ای بی‌نهایت طویل (به شعاع R) را تقریباً با تعداد زیادی سیم موازی که می‌توانند در پتانسیلهای دلخواه قرار گیرند، مشابه فرض می‌کنیم. (الف) اگر پتانسیل پوسته برابر با $V_0\sin\theta$ باشد پتانسیل و میدان الکتریکی را در داخل و خارج پوسته به دست آورید. (ب) خطوط نیرو را رسم کنید.

حل:

$$\nabla^2\varphi(r,\theta)=0$$
$$\varphi(r,\theta)=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)r^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(A'_n\cos n\theta+B'_n\sin\theta)r^{-n}$$

برای به دست آوردن ضرایب ثابت A_n و B_n و ... شرایط مرزی مسئله را اعمال می‌کنیم:

$Q=0 \Rightarrow B_0$ ، فرض می‌کنیم : $A_0=0$ (۱)

$r\to 0 \Rightarrow \varphi_{in}\not\to\infty$ (۲)

$r\to\infty \Rightarrow \varphi_{out}\to 0$ (۳)

$r=R \Rightarrow \varphi_{in}=\varphi_{out}=V_0\sin\theta$ (۴)

$$(۱),(۲),(۳)\Rightarrow\begin{cases}\varphi_{in}=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)r^n\\ \varphi_{out}=\sum_{n=1}^{\infty}(A'_n\cos n\theta+B'_n\sin n\theta)r^{-n}\end{cases}$$

$$\overset{(۴)}{\Rightarrow}(B_1\sin\theta)R=(B'_1\sin\theta)R^{-1}=V_0\sin\theta$$
$$\Rightarrow\begin{cases}B_1=\dfrac{V_0}{R}\ , & n\neq 1\ \ B_n=0\ ,\ \ \forall_n A_n=0\\ B'_1=V_0 R\ , & n\neq 1\ \ B'_n=0\ ,\ \ \forall_n A'_n=0\end{cases}$$

بنابراین:

$$\varphi_{in}=\frac{V_0}{R}r\sin\theta\ \ ,\ \ \varphi_{out}=V_0 R\frac{\sin\theta}{r} \quad (۵)$$

برای تعیین میدان الکتریکی به این صورت عمل می‌کنیم:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi=-\left[\hat{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right]\overset{(۵)}{\Rightarrow}$$

$$\begin{cases}\vec{E}_{in}=-\left[\hat{r}(\dfrac{V_0}{R}\sin\theta)+\hat{\theta}\dfrac{1}{r}(\dfrac{V_0}{R}r\cos\theta)\right]\\ \quad=-\dfrac{V_0}{R}\left[\sin\theta\hat{r}+\cos\theta\hat{\theta}\right]\\ \vec{E}_{out}=-\left[\hat{r}(-\dfrac{V_0 R\sin\theta}{r^2})+\hat{\theta}\dfrac{1}{r}(\dfrac{V_0 R\cos\theta}{r})\right]\\ \quad=-\dfrac{V_0 R}{r^2}\left[-\sin\theta\hat{r}+\cos\theta\hat{\theta}\right]\end{cases}\quad (۶)$$

ب)

$$\frac{E_r}{E_\theta}=\frac{dr}{r\,d\theta}$$

physicsclass.blogsky.com

$$(۶)\Rightarrow \frac{dr}{r\,d\theta}=\frac{-\frac{V_۰}{R}\sin\theta}{-\frac{V_۰}{R}\cos\theta}=\tan\theta$$

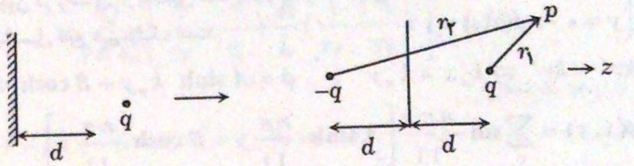
$$\Rightarrow \ln r=\int\tan\theta\,d\theta=-\ln\cos\theta+\ln C$$

$$\Rightarrow \ln r\cos\theta=\ln C \;\Rightarrow\; r\cos\theta=C$$

به همین ترتیب منحنی‌های خطوط میدان در خارج از استوانه بدست می‌آید.

۳-۱۴- بار نقطه‌ای q در فاصلهٔ d از یک صفحهٔ رسانای نامتناهی متصل به زمین قرار دارد. بار کل القایی در صفحه را، با انتگرال‌گیری مستقیم از تابع چگالی سطحی بار، محاسبه کنید.

حل:



با توجه به شکل دو بار نقطه‌ای q و $-q$ را در فاصلهٔ d و $-d$ از مبداء و صفحهٔ رسانا را منطبق بر صفحهٔ xy در نظر می‌گیریم. بنابراین پتانسیل در نقطهٔ دلخواه P به صورت زیر است:

$$r_۱=[x^۲+y^۲+(z-d)^۲]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$r_۲=[x^۲+y^۲+(z+d)^۲]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\varphi=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ r_۱}-\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ r_۲}$$

$$\varphi=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\frac{۱}{[x^۲+y^۲+(z-d)^۲]^{\frac{۱}{۲}}}-\frac{۱}{[x^۲+y^۲+(z+d)^۲]^{\frac{۱}{۲}}}\right]$$

میدان الکتریکی در نزدیکی سطح رسانا: $E_z=\frac{\sigma}{\varepsilon_۰}$

بنابراین چگالی سطحی بار برابر است با:

$$\sigma=\varepsilon_۰E_z=-\varepsilon_۰\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=۰}$$

$$=-\varepsilon_۰\left[\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\left(-(z-d)(x^۲+y^۲+(z-d)^۲)^{-\frac{۳}{۲}}+(z+d)(x^۲+y^۲+(z+d)^۲)^{-\frac{۳}{۲}}\right)\right]\Bigg|_{z=۰}$$

$$=\frac{-q}{۴\pi}\left(۲d(x^۲+y^۲+d^۲)^{-\frac{۳}{۲}}\right)=\frac{-qd}{۲\pi(x^۲+y^۲+d^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

با انتگرال‌گیری روی کل سطح صفحهٔ رسانا، بار کل Q حاصل می‌شود:

تغییر متغیر: $y^۲+d^۲=A^۲\;,\;x=A\tan\theta$

$$Q=\int\sigma\,da=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-qd}{۲\pi(x^۲+y^۲+d^۲)^{\frac{۳}{۲}}}dx\,dy$$

$$Q=\frac{-qd}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{+\frac{\pi}{۲}}\frac{A\sec^۲\theta\,d\theta}{(A^۲\tan^۲\theta+A^۲)^{\frac{۳}{۲}}}dy$$

$$=\frac{-qd}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{+\frac{\pi}{۲}}\frac{A\sec^۲\theta\,d\theta}{A^۳\sec^۳\theta}dy$$

$$=\frac{-qd}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{+\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos\theta}{A^۲}d\theta\,dy$$

$$=\frac{-qd}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{۲}{A^۲}dy=\frac{-qd}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{۲}{y^۲+d^۲}dy$$

$$=\frac{-qd}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{y^۲+d^۲}=\frac{-qd}{\pi}\;\frac{\tan^{-۱}(\frac{y}{d})}{d}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=-q$$

در واقع کل بار القایی بر روی صفحهٔ رسانا برابر بار تصویری $-q$ است.

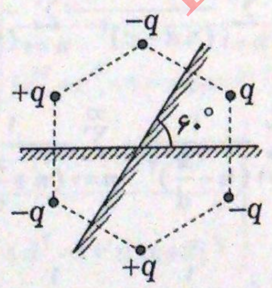
۳-۱۵- دو بار نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ در نزدیکی یک صفحهٔ رسانای نامتناهی متصل به زمین، قرار دارند. (الف) بارهای تصویری لازم را برای آنکه این صفحه به یک سطح با پتانسیل ثابت تبدیل شود، پیدا کنید. (ب) آیا از نتیجه‌ای که در قسمت (الف) به دست آورده‌اید، می‌توانید توزیع بار تصویری مورد لزوم را برای موردی که یک جسم باردار به شکل دلخواه با چگالی ρ در مقابل یک صفحهٔ رسانای نامتناهی قرار دارد، پیشگویی کنید؟

حل: الف) دو بار تصویری در واقع همان تصاویر بارها در آینهٔ جایگزین صفحهٔ رسانا هستند.

ب) توزیع بار تصویری آینه‌ای $(-\rho)$، بار تصویری مورد لزوم برای روش تصویری را فراهم می‌کند.

۳-۱۶- دو صفحهٔ رسانای متصل به زمین با یکدیگر زاویهٔ ۶۰° می‌سازند و بار نقطه‌ای q میان آنها قرار دارد. مکان بارهای تصویری که میدان الکتریکی میان این دو صفحه را می‌دهند، تعیین کنید.

حل:



تعداد بارهای تصویری برای باری که میان دو آینهٔ تخت مقاطع با زاویهٔ θ قرار داشته باشد، برابر است با:

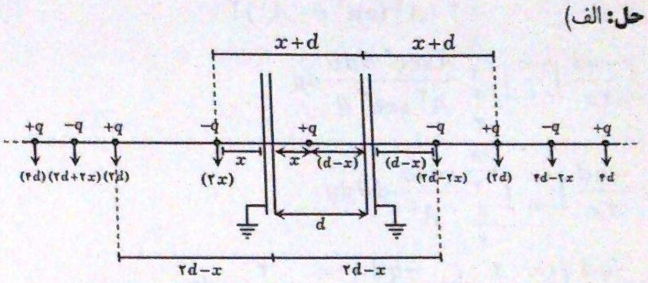
$$n=\frac{۳۶۰^\circ}{\theta^\circ}-۱\;\rightarrow\; n=\frac{۳۶۰^\circ}{۶۰^\circ}-۱=۵$$ تعداد تصاویر

۳-۱۷- بار نقطه‌ای q میان دو صفحهٔ رسانای موازی متصل به زمین قرار گرفته است. فاصلهٔ دو صفحه از یکدیگر d است. (الف) مکان

Physicsclass.blogsky.com

تعداد بی‌نهایت بارهای تصویری را پیدا کنید. (ب) نیروی وارد بر بار q را بر حسب یک رشتهٔ نامتناهی بیان کنید.

حل: الف)



طریقهٔ پیداکردن مکان چند بار تصویری ابتدایی در سمت چپ و راست بار $+q$ در شکل نشان داده شده است، به همین ترتیب مکان بارهای تصویری در سمت چپ و راست را پیدا می‌کنیم، که بارهای تصویری نسبت به بار $+q$ در سمت راست به صورت زیر قرار می‌گیرند:

$(2d-2x), 2d, (4d-2x), 4d, (6d-2x), \ldots$

و همچنین بارهای تصویری در سمت چپ بار $+q$ به صورت زیر هستند:

$2x, 2d, (2d+2x), 4d, (4d+2x), \ldots$

ب) از طرف بارهای سمت راست نیروی بر بار $+q$ وارد می‌شود که برابر است با:

$$F_1=\frac{+q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q}{(2d-2x)^2}+\frac{+q}{(2d)^2}+\frac{-q}{(4d-2x)^2}+\frac{+q}{(4d)^2}+\cdots\right]$$

و همچنین از طرف بارهای سمت چپ، نیروی بر بار $+q$ وارد می‌شود که برابر است با:

$$F_2=\frac{+q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q}{(2x)^2}+\frac{+q}{(2d)^2}+\frac{-q}{(2d+2x)^2}+\frac{+q}{(4d)^2}+\cdots\right]$$

بنابراین، مقدار کل نیروی وارد بر بار $+q$:

$$F_{total}=F_1-F_2=\frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(2d-2x)^2}+\frac{1}{(4d-2x)^2}+\frac{1}{(6d-2x)^2}+\cdots\right]$$

$$+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(2x)^2}+\frac{1}{(2d+2x)^2}+\frac{1}{(4d+2x)^2}+\cdots\right]$$

$$F_{tatal}=\frac{-q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(nd-x)^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(nd+x)^2}\right]$$

$$=\frac{-q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-\frac{x}{d})^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{x}{d})^2}\right]$$

$$=\frac{-q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-\frac{x}{d})^2}-\frac{1}{(n+\frac{x}{d})^2}\right)-\frac{1}{(\frac{x}{d})^2}\right]$$

۳-۱۸ - الف) با استفاده از روشی که در بخش ۳-۷ توضیح داده شد، پاسخی برای معادلهٔ لاپلاس در ناحیهٔ دوبعدی مستطیل شکلی که با خطوط $x=0$، $y=0$، $x=11$ و $y=6$ احاطه شده است، با در نظر گرفتن شرایط مرزی $\varphi(0,y)=\varphi(x,6)=\varphi(11,y)=0$ و $\varphi(x,0)=1$، به دست آورید. (راهنمایی: با استفاده از شرایط مرزی $\varphi=0$ نشان دهید که پاسخ را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از جملات، شامل حاصل ضربهای توابع سینوسی x و توابع سینوس هیپربولیکی (هذلولوی) y نوشت که در آن هر کدام از جملات در هر سه شرط مرزی $\varphi=0$ صدق کنند.) (ب) ضرایب را با این شرایط به دست آورید که به ازای تمام xها، در این مسئله متداول رشتهٔ فوریه $\varphi(x,0)=1$ باشد.

حل:

$x=0,\ x=11,\ \phi=0 \Rightarrow \cos,\ \sin$

$x=0 \to \phi=0 \to \sin$ فقط $\to \phi=\sin k_x x$

$x=11\to\phi=0\to\phi=\sin k_x x\Big|_{x=11}=0\to 11k_x x=n\pi \Rightarrow k_x x=\frac{n\pi}{11}$

$y=4\to\phi=0$

$y=0\to\phi(x,0)=1$

چون در راستای y پتانسیل فقط یکبار صفر شده پس پتانسیل تابع هیپربولیک است.

$kx^2=ky^2 \Rightarrow k_x x=k_y y \quad , \quad \phi=A\sinh k_y y+B\cosh k_y y$

$$\phi(x,y)=\sum_n \sin\frac{n\pi x}{11}\left[A\sinh\frac{n\pi}{11}y+B\cosh\frac{n\pi}{11}y\right]$$

$$\phi(x,4)=0\to 0=\sum_n \sin\frac{n\pi x}{11}\left[A\sinh\frac{n\pi 4}{11}y+B\cosh\frac{4\pi n}{11}\right]$$

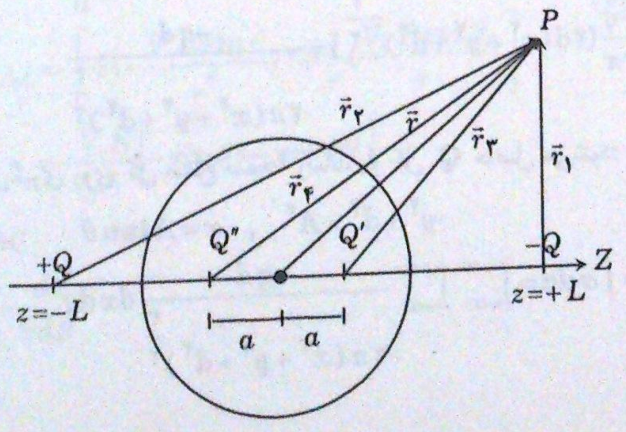
$$A\sinh\frac{4}{11}n\pi=-B\cos h\frac{4n\pi}{11}\Rightarrow B=-A\frac{\sinh\frac{4n\pi}{11}}{\cosh\frac{4n\pi}{11}}$$

$$\phi(x,y)=\sum_n A\sin\frac{n\pi x}{11}\left[\sinh\frac{n\pi}{11}y-\frac{\sinh\frac{4n\pi}{11}}{\cosh\frac{4n\pi}{11}}\cosh\frac{n\pi}{11}y\right]$$

$$=\sum_n A\frac{\sinh\frac{n\pi x}{11}}{\cosh\frac{4n\pi}{11}}\left[\sinh(\frac{n\pi}{11}(y-4)\right]$$

۳-۱۹ - نشان دهید که مسئلهٔ کرهٔ رسانای بی‌بار در میدان الکتریکی E_0 را که در آغاز یکنواخت است، می‌توان به کمک تصاویر حل کرد، {راهنمایی: میدان الکتریکی یکنواخت در حوالی مبداء مختصات را می‌توان تقریباً با میدان دو بار نقطه‌ای Q و $-Q$ که روی محور z و به ترتیب در نقاط $z=-L$ و $z=+L$ قرار دارند، مساوی فرض کرد. هرچه L بزرگتر باشد $(L\to\infty)$ میدان یکنواخت‌تر می‌شود. واضح است که $\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L^2}=E_0$}

حل:



physicsclass.blogsky.com

Q' تصویر بار $-Q$ در سمت راست مبداء مختصات و Q'' تصویر بار $+Q$ در سمت چپ مبداء، در نظر می‌گیریم. اگر فرض شعاع کره R است، بنابراین:

$$a=\frac{R^2}{L} \quad , \quad Q'=\frac{R}{L}Q \quad , \quad Q''=\frac{-R}{L}Q$$

$$\varphi(r,\theta)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-Q}{r_1}+\frac{+Q}{r_2}+\frac{Q'}{r_3}+\frac{Q''}{r_4}\right]$$

و با جایگذاری مقادیر Q' و Q''، پتانسیل به صورت زیر درمی‌آید:

$$\varphi(r,\theta)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{R}{Lr_3}-\frac{R}{Lr_4}\right]$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}+\frac{R}{L}\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}\right)\right] \qquad (1)$$

و با توجه به شکل:

$$\vec r_1=\vec r-\vec L \quad , \quad \vec r_2=\vec r+\vec L \quad , \quad \vec r_3=\vec r-\vec a \quad , \quad \vec r_4=\vec r+\vec a$$

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{|\vec r-\vec L|}=[r^2+L^2-2rL\cos\theta]^{-\frac{1}{2}}$$

و با توجه به بسط دوجمله‌ای برای $L\to\infty$ داریم:

$$r_1^{-1}\cong L^{-1}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r^2-2rL\cos\theta}{L^2}\right)\right]$$

و به همین ترتیب برای r_2 داریم:

$$r_2^{-1}\cong L^{-1}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r^2+2rL\cos\theta}{L^2}\right)\right]$$

$$r_2^{-1}-r_1^{-1}\cong\frac{-2r\cos\theta}{L^2} \qquad (2)$$

و به همین ترتیب برای $(r_3^{-1}-r_4^{-1})$ داریم:

$$r_3^{-1}-r_4^{-1}\cong\frac{2a\cos\theta}{r^2} \qquad (3)$$

با جایگذاری روابط (۲) و (۳) در رابطهٔ (۱):

$$\varphi(r,\theta)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-2r\cos\theta}{L^2}+\frac{R}{L}\left(\frac{2a\cos\theta}{r^2}\right)\right]$$

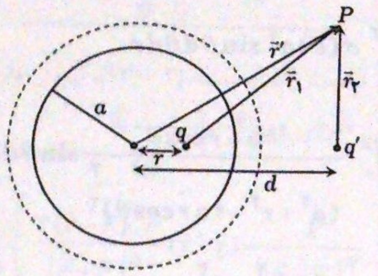
$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-2r\cos\theta}{L^2}+\frac{R}{L}\left(\frac{2R^2\cos\theta}{Lr^2}\right)\right]$$

$$=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L^2}(-r\cos\theta+R^3\cos\theta\, r^{-2})$$

$$=-rE_0\cos\theta+R^3E_0\cos\theta\, r^{-2}$$

۳-۲۰ - بار نقطه‌ای q در داخل پوستهٔ رسانای کروی و به فاصلهٔ r از مرکز آن قرار دارد. شعاع داخلی پوسته a است. (الف) نشان دهید که این مسئله را می‌توان با شگرد تصویری حل کرد. (ب) چگالی سطحی بار σ را که در روی سطح داخلی پوسته القا می‌شود، پیدا کنید. (توجه: پتانسیل پوستهٔ کروی را نمی‌توان کاملاً بر حسب q و تصویر آن مشخص کرد، زیرا بارهای ثابت خارج از کره نیز می‌توانند در ایجاد پتانسیل کره سهیم باشند. با وجود این، سهم بارهای خارجی فقط افزودن جملهٔ ثابتی به پتانسیل کره است). (ج) بار کل القا شده در سطح داخلی پوسته را به دو طریق به دست آورید: (۱) با استدلال فیزیکی و (۲) با انتگرال‌گیری از σ بر روی سطح.

حل:



با توجه به نتایج بدست آمده در قسمت بار نقطه‌ای و کرهٔ رسانا می‌توان با تغییر جای بار اصلی و بار تصویری به نتایج زیر رسید:

$$\left.\begin{array}{l} q\to q' \\ q'\to q \\ b\to r \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} q=-\dfrac{a}{r}q' \\ r=\dfrac{a^2}{d}\to d=\dfrac{a^2}{r} \end{array}$$

(ب) پتانسیل در نقطهٔ دلخواه P به فاصلهٔ $\vec r'$ از مبداء مختصات برابر است با:

$$\varphi(r',\theta)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_1}+\frac{q'}{r_2}\right]$$

$$r_1=|\vec r'-\vec r|=[r'^2+r^2-2r'r\cos\theta]^{-\frac{1}{2}}$$

$$r_2=|\vec r'-\vec d|=[r'^2+d^2-2r'd\cos\theta]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(r',\theta)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{[r'^2+r^2-2r'r\cos\theta]^{\frac{1}{2}}}-\frac{a}{r}\frac{q}{[r'^2+d^2-2r'd\cos\theta]^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$E_{r'}=-\frac{\partial\varphi}{\partial r'}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-\frac{1}{2}(2r'-2r\cos\theta)}{[r'^2+r^2-2r'r\cos\theta]^{\frac{3}{2}}}-\frac{a}{r}\frac{-\frac{1}{2}(2r'-2d\cos\theta)}{[r'^2+d^2-2r'd\cos\theta]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-r'+r\cos\theta}{[r'^2+r^2-2r'r\cos\theta]^{\frac{3}{2}}}+\frac{a}{r}\frac{r'-(\frac{a^2}{r})\cos\theta}{[r'^2+\frac{a^4}{r^2}-2r'\frac{a^2}{r}\cos\theta]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\sigma=\varepsilon_0 E_{r'}\Big|_{r=a}=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r'}\Big|_{r=a}$$

physicsclass.blogsky.com

$$=\frac{-q}{4\pi}\left[\frac{-a+r\cos\theta}{[a^2+r^2-2ar\cos\theta]^{\frac{3}{2}}}+\frac{\frac{a^2}{r}-\frac{a^3}{r^2}\cos\theta}{[a^2+\frac{a^4}{r^2}-2\frac{a^3}{r}\cos\theta]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$Q=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sigma(\theta)a^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$=\frac{-qa^2}{2}\left[\int_0^{\pi}\frac{-a+r\cos\theta}{(a^2+r^2-2ar\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta\, d\theta+\int_0^{\pi}\frac{\frac{a^2}{r}-\frac{a^3}{r^2}\cos\theta}{[a^2+\frac{a^4}{r^2}-2\frac{a^3}{r}\cos\theta]^{\frac{3}{2}}}\sin\theta\, d\theta\right]$$

$$=\frac{-qa^2}{2}\left[\int_0^{\pi}\frac{-a\sin\theta\, d\theta}{(a^2+r^2-2ar\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}+\int_0^{\pi}\frac{(\frac{a^2}{r})\sin\theta\, d\theta}{(a^2+\frac{a^4}{r^2}-2\frac{a^3}{r}\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\right]=-q$$

(۱) با استدلال فیزیکی:

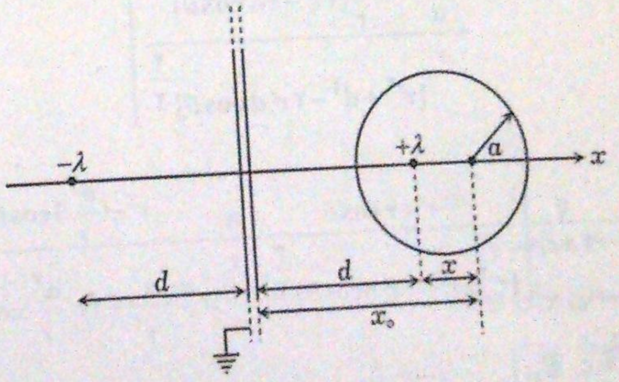
یک سطح کروی در پوستهٔ رسانا به عنوان سطح گاوسی در نظر می‌گیریم و چون میدان در داخل رسانا صفر است بنابراین:

$$\oint_S \vec{E}.\hat{n}\, da=\frac{Q_{total}}{\varepsilon_0}\rightarrow Q_{total}=0$$

$$\rightarrow Q_{total}=q+Q=0\rightarrow Q=-q$$

۳-۲۱ - استوانهٔ رسانای بلندی که بار در واحد طول آن λ است، موازی با یک صفحهٔ رسانای نامتناهی متصل به زمین قرار دارد. فاصلهٔ محور استوانه از صفحه برابر x_0 و شعاع استوانه برابر a است. (الف) مکان بار تصویری خطی را پیدا کنید. (ب) مقدار ثابت M را (که تعیین کنندهٔ پتانسیل استوانه است) بر حسب a و x_0 به دست آورید.

حل:



این مسأله حالت دیگری از مسئله مربوط به شکل (۳-۶) کتاب است. بار $+\lambda$ را در مبداء دستگاه مختصات و منطبق بر محور zها و بار $-\lambda$ در نقطهٔ $(-2d,0)$ و به موازات محور zها در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن مرکز استوانه در $(x,0)$ داریم:

$$\begin{cases} x=\frac{2M^2 d}{1-M^2} \\ R_c=\frac{2dM}{1-M^2}=a \Rightarrow d=\frac{a(1-M^2)}{2M} \end{cases}\qquad (1)$$

$$x_0=x+d=(\frac{2M^2}{1-M^2}+1)d\qquad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\quad x_0=(\frac{2M^2}{1-M^2}+1)\frac{a(1-M^2)}{2M}$$

$$\Rightarrow M^2a+a-2Mx_0=0$$

$$\Rightarrow M=\frac{x_0}{a}\pm\sqrt{(\frac{x_0}{a})^2-1}\ \Rightarrow\ \varphi=\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln M$$

۳-۲۲ - توزیع کروی باری با چگالی بار ثابت ρ به ازای $r\le R$ مشخص شده است. برای شعاعهای بزرگتر از R بار صفر است. (الف) با انتگرال‌گیری از معادلهٔ پواسون، پتانسیل $\varphi(r)$ را حساب کنید. (ب) نتیجه را با محاسبهٔ انتگرال معادلهٔ (۳-۱) امتحان کنید. {راهنمایی: برای محاسبهٔ انتگرال (۳-۱) ناحیهٔ بار را به پوسته‌های کروی هم‌مرکز به ضخامت dr تقسیم کنید.}

حل: الف)

$$\nabla^2\varphi(r)=\frac{-\rho}{\varepsilon_0}\ \rightarrow\ \begin{cases}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\varphi}{dr})=\frac{-\rho}{\varepsilon_0} & r\le R\\ \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\varphi}{dr})=0 & r\ge R\end{cases}$$

$$\rightarrow\varphi_{in}(r)=\frac{-\rho r^2}{6\varepsilon_0}+\frac{A}{r}+B\ ,\quad \varphi_{out}=\frac{A'}{r}+B'$$

برای بدست آوردن ضرایب ثابت، شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم، بنابراین:

$$\varphi(r\rightarrow 0)\nrightarrow\infty\ \rightarrow\ A=0$$

$$\varphi(r\rightarrow\infty)=0\ \rightarrow\ B'=0$$

$$\varphi_{in}(r=R)=\varphi_{out}(r=R)\ \rightarrow\ \frac{-\rho R^2}{6\varepsilon_0}+B=\frac{A'}{R}\qquad (1)$$

با استفاده از قانون گاوس برای سطحی کروی به شعاع $r=R$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\oint_S\vec{E}.d\vec{s}=\frac{q}{\varepsilon_0}\\ \vec{E}_{out}=\frac{A'}{r^2}\hat{r}_0\end{array}\right\}\rightarrow\int\frac{A'}{R^2}ds=4\pi A'=\frac{1}{\varepsilon_0}(\frac{\rho 4\pi}{3}R^3)$$

$$\rightarrow A'=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\qquad (2)$$

$$(1),(2)\rightarrow B=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

بنابراین:

$$\varphi_{in}=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}(1-\frac{r^2}{3R^2})\qquad r\le R$$

Physicsclass.blogsky.com

$$\varphi_{out}=\frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 r}\qquad r\geq R$$

ب)

$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'|=[r^2+r'^2-2rr'\cos\theta']^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{\rho r'^2\sin\theta' dr' d\theta' d\varphi'}{[r^2+r'^2-2rr'\cos\theta']^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{r'^2\sin\theta' dr' d\theta'}{[r^2+r'^2-2rr'\cos\theta']^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_0^{R}r'^2 dr'\frac{1}{rr'}[r^2+r'^2-2rr'\cos\theta']^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}\int_0^{R}r'\big[|r+r'|-|r-r'|\big]dr'$$

برای حالت $r>R$ داریم:

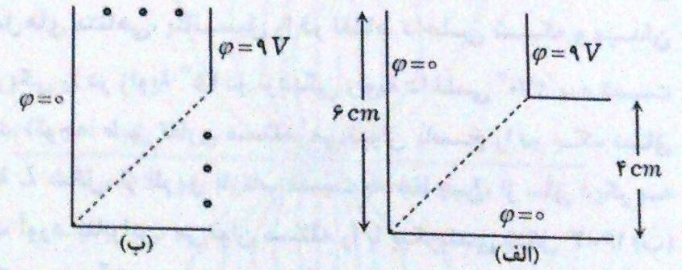
$$\varphi(r)=\frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}\int_0^{R}2r'^2 dr'=\frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}=\left[\frac{2r'^3}{3}\right]_0^{R}=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

$$\varphi(r)=\frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}\left[\int_0^{R}2r' dr'+\int_r^{R}2rr' dr'\right]$$

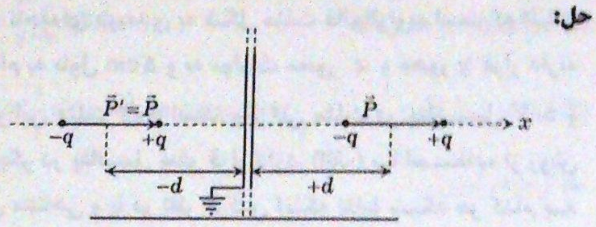
$$=\frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}\left[\frac{2r'^3}{3}\Big|_0^{r}+rr'^2\Big|_r^{R}\right]=\frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}\left[\frac{2r^3}{3}+r(R^2-r^2)\right]$$

$$=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{r^2}{3R^2}\right]$$

۳-۲۳ - دوقطبی $\vec{P}$ عمود بر یک صفحهٔ رسانای نامتناهی و به فاصلهٔ d از آن قرار دارد. صفحه به زمین متصل است (یعنی پتانسیل آن صفر است). نیروی وارد بر صفحه از طرف این دوقطبی را محاسبه کنید.



حل:



با توجه به نتیجهٔ قسمت (الف) مسئله (۲ – ۲۳)، نیروی وارد بر یک دو قطبی $\vec{P}$ در یک میدان خارجی E_{ext} برابر است با:

$$\vec{F}=\vec{P}.\vec{\nabla}\vec{E}_{ext}\qquad(1)$$

$$\vec{E}_{ext}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{r}-\vec{r}').\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5}(\vec{r}-\vec{r})-\frac{\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]$$

$\vec{P}=\vec{P}=P\hat{i}$ و با بردار $(\vec{r}-\vec{r}')$ موازی است، بنابراین $\vec{E}ext$ در محل $\vec{P}'$ (دو قطبی تصویری) تنها دارای مؤلفه‌ای در جهت محور x هاست.

$$\vec{E}_{ext}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(x-d)^2P}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{\frac{5}{2}}}-\frac{P}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}\right]\hat{i}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2P}{(x-d)^3}\hat{i}$$

$$(1)\Rightarrow\ \vec{F}=\vec{P}'.\vec{\nabla}\vec{E}_{ext}\big|_{x=-d}$$

$$=P\frac{\partial}{\partial x}E_x\big|_{x=-d}^{\hat{i}}=P\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{P}{2\pi\varepsilon_0(x-d)^3}\right]_{x=-d}\hat{i}$$

$$=\frac{P^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-3}{(x-d)^4}\right]_{x=-d}\hat{i}=\frac{-3P^2}{32\pi\varepsilon_0 d^4}\hat{i}$$

۳-۲۴ - مثال یک‌بعدی را که در بخش (۳-۱۲) توضیح داده شد، در نظر بگیرید. (الف) با توجه به اینکه $\varphi(0)=0$ و $\varphi(1)=1$ است، برنامه‌ای بنویسید که به کمک آن بتوان معادلهٔ لاپلاس را با روش تفاضل‌های متناهی حل کرد. (ب) هم‌گرایی را در چند تکرار نخست، بررسی کنید ($w=1,1/5$ و $N=10,20$).

حل:

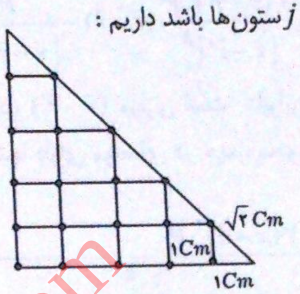
با توجه به برنامه کامپیوتری در پیوست کتاب داریم:

physicsclass.blogsky.com

۳ - ۲۵ - ناحیه‌ای دوبعدی به شکل مثلث قائم‌الزاویه است که اضلاع آن هر کدام به طول $5cm$ و به موازات محور x و محور y قرار دارند و طول وتر این مثلث $5\sqrt{2}$ است. وتر این مثلث در پتانسیل $50V$ و دو ضلع دیگر در پتانسیل صفر قرار دارد. (الف) با استفاده از روش تفاضل‌های متناهی و با در نظر گرفتن اینکه نقاط شبکه هر کدام به فاصلهٔ یک سانتی‌متر از یکدیگر در هر راستا قرار گرفته‌اند، و انجام عمل تکرار، پتانسیل‌ها را در هر نقطه از شبکه تا نزدیک‌ترین ولتاژ مربوط به دست آورید. (ب) سطوح هم پتانسیل را رسم کنید.

حل:

اگر i نمایانگر سطرها و j ستون‌ها باشد داریم :



$$\phi_{00}=\phi_{01}=\phi_{02}=\phi_{03}=\phi_{04}=\phi_{05}=0v$$

$$\phi_{10}=\phi_{20}=\phi_{30}=\phi_{40}=\phi_{50}=0v$$

$$\phi_{41}=\phi_{32}=\phi_{23}=\phi_{14}=50v$$

$$\phi_{ij}^{n+1}=\frac{w}{4}\left[\phi_{i,j+1}^{n}+\phi_{i+1,j}^{n}+\phi_{i,j-1}^{n+1}+\phi_{i-1,j}^{n+1}\right]+(1-w)\phi_{i,j}^{n}$$

$$n=0\rightarrow\phi'_{1,1}=\phi'_{1,2}=\phi'_{2,1}=\phi'_{1,3}=\phi'_{3,1}=\phi'_{2,2}=0$$

$$n=1\rightarrow\phi_{1,1}^{2}=\frac{w}{4}\left[\phi_{1,2}^{1}+\phi_{2,1}^{1}+\phi_{1,0}^{2}+\phi_{0,1}^{2}\right]+(1-w)\phi_{1,1}^{1}$$

$$\phi_{1,1}^{2}=0,\quad \phi_{2,1}^{2}=0,\quad \phi_{1,3}^{2}=37/5,\quad \phi_{1,2}^{2}=0,$$

$$\phi_{2,1}^{2}=37/5,\quad \phi_{3,1}^{2}=37/5$$

$$n=2\rightarrow\phi_{1,1}^{3}=0,\quad \phi_{2,1}^{3}=32/81$$

$$\phi_{1,2}^{3}=28/125,\quad \phi_{22}^{3}=41/5,\quad tol=\phi_{ij}^{n+1}-\phi_{ij}^{n}$$

$$\phi_{1,3}^{3}=39/13,\quad \phi_{31}^{3}=31/05,$$

$$\max(tol)=28/125\rightarrow\max(tol)^{3}<\max(tol)^{2}$$

$$n=3\begin{cases}\phi_{11}^{4}=22/85 & \phi_{2,1}^{4}=19/36\\ \phi_{1,2}^{4}=24/73 & \phi_{2,2}^{4}=33/28\\ \phi_{1,3}^{4}=27/12 & \phi_{3,1}^{4}=29/23\end{cases}$$

$$\rightarrow\max(\phi_{ij}^{4}-\phi_{ij}^{3})=22/85<\max(\phi_{ij}^{3}-\phi_{ij}^{2})$$

تعداد تکرار N=۲۰	بیشینه خطا w=۱/۵	تعداد تکرار N=۱۰	بیشینه خطا w=۱	تعداد تکرار N=۱۰	بیشینه خطا w=۱/۵	تعداد تکرار N=۲۰	بیشینه خطا w=۱
۱	۱/۶۶۲۲۸	۱	۱/۴۴۶۸۰۳	۱	۱/۷۴۹۹۰۶	۱	…۲۱۰۹۸۸
۲	۱/۱۶۳۵۵۹	۲	۰/۷۲۳۴۰۱	۲	۲/۰۱۲۳۹۲	۲	…۹۲۱۰۶۱
۳	۱/۳۷۱۳۳۸	۳	۰/۱۳۵۶۳۸	۳	۰/۱۶۶۰۸۳۱	۳	…۴۲۰۸۳۹
۴	۰/۵۵۸۱۰۳	۴	۰/۱۰۹۵۲۷	۴	۰/۵۷۳۰۷۸	۴	…۵۹۷۰۷۰
۵	۰/۳۹۳۳۶۰	۵	۰/۰۹۲۱۷۱	۵	۰/۳۹۶۵۶۰	۵	…۲۱۸۵۶۲
۶	۰/۲۷۲۸۵۵	۶	۰/۰۸۰۸۲۶	۶	۰/۵۲۲۲۰۴	۶	…۹۸۵۰۴
۷	۰/۱۸۸۰۰۹	۷	۰/۰۷۰۶۲۲	۷	۰/۰۹۱۵۲۴	۷	…۸۴۴۲۸
۸	۰/۱۲۸۴۱۲	۸	۰/۰۶۲۲۸۵	۸	۰/۱۰۴۲۳۶	۸	…۰۹۰۴۸
۹	۰/۰۸۶۸۷۹	۹	۰/۰۵۶۵۶۶	۹	۰/۰۷۶۹۵۴	۹	۰/۰۴۶۸۶۹
۱۰	۰/۱۲۴۵۰۸	۱۰	۰/۰۵۱۲۴۳	۱۰	۰/۰۲۳۶۹۵	۱۰	۰/۰۳۲۴۱۳
۱۱	۰/۰۵۴۸۱۴	۱۱	۰/۰۴۶۳۷۷	۱۱	۰/۰۱۸۷۹۱	۱۱	۰/۰۱۸۵۹۶
۱۲	۰/۰۴۴۲۵۷	۱۲	۰/۰۴۱۹۵۸	۱۲	۰/۰۱۴۱۷۴	۱۲	۰/۰۱۳۹۹۱
۱۳	۰/۰۴۰۰۳۹	۱۳	۰/۰۳۷۹۵۴	۱۳	۰/۰۰۸۲۵۳	۱۳	۰/۰۰۸۱۸۵
۱۴	۰/۰۳۸۳۲۰	۱۴	۰/۰۳۴۳۳۱	۱۴	۰/۰۰۵۶۳۲	۱۴	۰/۰۰۵۵۸۵
۱۵	۰/۰۳۴۴۴۱	۱۵	۰/۰۳۱۰۵۳	۱۵	۰/۰۰۳۳۶۰	۱۵	۰/۰۰۳۳۴۴
۱۶	۰/۰۳۱۸۹۰	۱۶	۰/۰۲۸۰۸۸	۱۶	۰/۰۰۲۲۶۴	۱۶	۰/۰۰۲۲۴۱
۱۷	۰/۰۲۹۶۴۱	۱۷	۰/۰۲۵۴۰۶	۱۷	۰/۰۰۱۴۴۲	۱۷	۰/۰۰۱۴۳۳
۱۸	۰/۰۲۷۵۹۱	۱۸	۰/۰۲۲۹۸۰	۱۸	۰/۰۰۱۰۰۰	۱۸	۰/۰۰۱۰۰۰
۱۹	۰/۰۲۵۷۲۶	۱۹	۰/۰۲۰۷۸۶	۱۹	۰/۰۰۱۰۰۰	۱۹	۰/۰۰۱۰۰۰
۲۰	۰/۰۲۳۷۹۲	۲۰	۰/۰۱۸۸۰۱	۲۰	۰/۰۰۱۰۰۰	۲۰	۰/۰۰۱۰۰۰

$$n=4\begin{cases}\phi_{11}^{5}=5/11 & \phi_{2,1}^{5}=4/99\\ \phi_{1,2}^{5}=12/21 & \phi_{2,2}^{5}=27/31\\ \phi_{1,3}^{5}=28/54 & \phi_{3,1}^{4}=24/75\end{cases}$$

$$\rightarrow\max(tol)=17/74$$

۳ - ۲۶ - ناحیه‌ای دوبعدی و L شکل توسط دو سطح رسانا در دو طرفش با پتانسیل‌های $\varphi=0$ و $\varphi=9V$، مطابق شکل ۳ - ۱۶ (الف)، احاطه شده است. (الف) احاطه شده است. (الف) با استفاده از روش تفاضل‌های متناهی، پتانسیل را در نقاط داخلی شبکه و میدان الکتریکی را در زاویهٔ 45° در نزدیکی زاویهٔ داخلی 270° به دست آورید. (توجه: طبق تقارن مسئله، می‌توان پاسخ را در یک ساق ناحیهٔ L شکل، از طریق بازتاب نسبت به خط‌چین، از ساق دیگر به دست آورد. بنابراین، می‌توان مسئله را با پیکربندی شکل ۳-۱۶ (ب) حل کرد، بجز آنکه پس از هر تکرار باید به نقاط شبکهٔ سمت راست خط‌چین، مقادیر تصاویر آینه‌ای‌شان در بالای خط، داده شود). (ب) ابتدا مسئله را با یک شبکهٔ $1cm\times1cm$ حل کنید. (ج) سپس با یک شبکهٔ $1/2cm\times1/2cm$ کار را تکرار کنید.

حل:

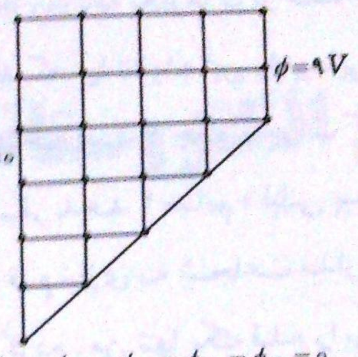
اگر i سطرهای افقی و j ستون‌های عمودی باشد داریم :

$$\phi_{00}=\phi_{1,0}=\phi_{2,0}=\phi_{3,0}=\phi_{4,0}=\phi_{5,0}=\phi_{6,0}=0v$$

$$\phi_{4,4}=\phi_{5,4}=\phi_{6,4}=9v$$

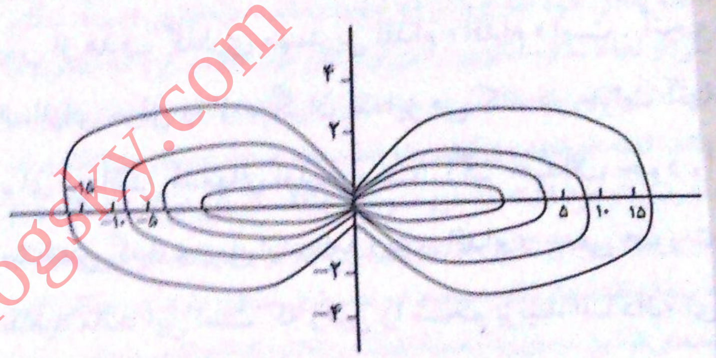
$$\phi_{i,j}^{n+1} = \frac{w}{4}\left[\phi_{i+1,j}^{n} + \phi_{i,j+1}^{n} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j-1}^{n+1}\right] + (1-w)\phi_{i,j}^{n}$$

$$tol = \max\left(\left|\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n}\right|\right)$$

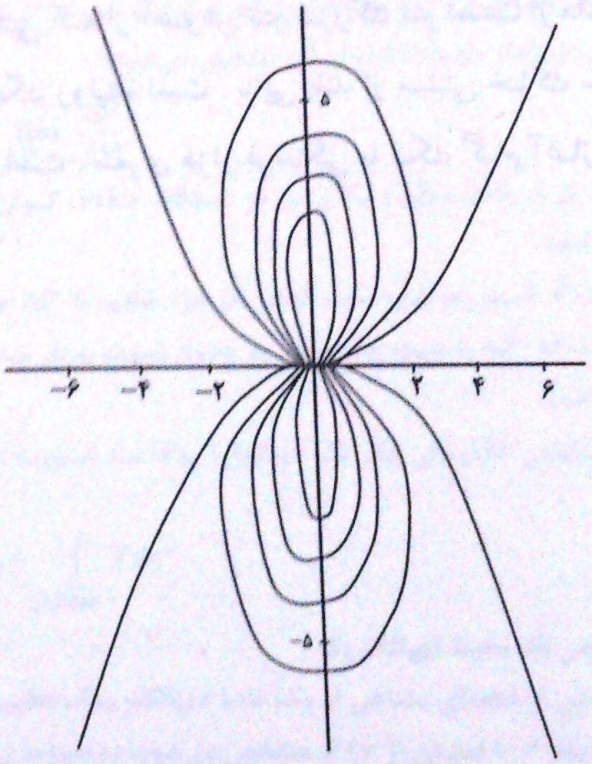


$$n = 1\begin{cases}\phi_{11} = \phi_{12} = \phi_{13} = \phi_{14} = \phi_{15} = \phi_{16} = 0 \\ \phi_{22} = \phi_{23} = \phi_{24} = \phi_{25} = \phi_{26} = 0\end{cases}$$

$$\phi_{23} = 0, \phi_{24} = 3/28, \phi_{25} = 4/64, \phi_{26} = 5/12$$



خطوط هم پتانسیل یک دو قطبی الکتریکی



میدان یک قطبی الکتریکی

(۱) نیروی وارد بر هر رسانا

$$F_E = \frac{1}{2}\oint_S \sigma E da$$

(۲) قبل از باردار کردن

$$F_A = \rho(\frac{1}{4}v) = mg \to \rho v = 4mg$$

بعد از باردار کردن

$$F'_A = F_E + mg \to \rho(\frac{1}{2}v) = F_E + mg \to F_E = mg$$

(۳)

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{آزاد} \to \varepsilon_2 E_{2r} - \varepsilon_1 E_{1r} = \sigma_{آزاد}$$

پوسته رسانا و میدان در درون آزاد رسانا صفر است

(۴)

$$D_{1n} = 0 \to \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma_{آزاد} \to \begin{cases} E_{2r} = \dfrac{\sigma_f}{\varepsilon_0} & \text{در سطح نیم کره بالایی} \\ E_{2r} = \dfrac{\sigma_f}{\varepsilon} & \text{در سطح نیم کره پایینی}\end{cases}$$

(۵)

$$(1),(4) \to F_E = \frac{1}{2}\oint_{\text{سطح بالایی}} \frac{\sigma_f^2}{\varepsilon_0}\hat{r}_0 da + \frac{1}{2}\oint_{\text{سطح پایین}} \frac{\sigma_f^2}{\varepsilon}\hat{r}_0 da$$

به دلیل تقارن و چون σ_f از φ,θ مستقل است پس y', x' در هر انتگرال صفر است

(۶)

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0$$

(۷) در مختصات کروی

$$\hat{r}_0 = \sin\theta\cos\varphi\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\hat{y} + \cos\theta\hat{k}$$

(۸)

$$(5),(6),(7) \to F_E = \frac{\hat{k}}{2}\oint_{\text{سطح بالایی}} \frac{\sigma_f^2}{\varepsilon_0}\cos\theta(R^2\sin\theta d\theta d\varphi) + \frac{\hat{k}}{2}\oint \frac{\delta_f^2}{\varepsilon}\cos\theta(R^2\sin\theta d\theta d\varphi)$$

(۹)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{1}{2}$$

سطح بالایی — سطح پایینی

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

(۱۰)

$$\xrightarrow{8} F_E = \frac{\hat{K}R^2}{2}(\frac{1}{2})(2\pi)\left[\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_f)^2 - \frac{1}{\varepsilon}(\sigma_f)^2\right]$$

(۱۱)

Physicsclass.blogsky.com

$$\nabla^2\varphi(r)=0 \to \varphi(r)=A+\frac{B}{r}$$

$$\begin{cases} r\to\infty \to \varphi=0 \to A=0 \\ \varphi(r=R)=\varphi_0=\dfrac{B}{R} \to B=R\varphi_0 \to \varphi(r)=\dfrac{R\varphi_0}{r} \end{cases}$$

(۱۲)

$$E=-\nabla\varphi(r)$$

$$E=\frac{\varphi_0 R}{r^2}\hat{r}_0 \to \begin{cases} (\sigma_f)=\varepsilon_0 E_r\big|_{r=R}=\dfrac{\varepsilon\varphi_0}{R} & \text{سطح بالایی} \\ (\sigma_f)=\varepsilon E_r\big|_{r=R}=\dfrac{\varepsilon\varphi_0}{R}=K\dfrac{\varepsilon_0\varphi_0}{R} & \text{سطح پائینی} \end{cases}$$

(۱۳)

$$(10),(12)\to F_E=\hat{k}\frac{2\pi R^2}{4}\left(\frac{\varphi_0}{R}\right)^2\varepsilon_0(1-k)$$

$$=\hat{k}\frac{2\pi\varepsilon_0}{4}\varphi_0^2(1-k)$$

از رابطه ۳ و ۱۳ داریم :

$$mg=\frac{2\pi\varepsilon_0}{4}\varphi_0^2(1-k)\xrightarrow{g=-g\hat{k}}\varphi_0=\left[\frac{4mg}{2\pi\varepsilon_0(-1+k)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

پس اگر کره ای را به اختلاف پتانسیل وصل کنیم با باردار شدن کره و ایجاد میدان باعث پلاریزاسیون عایق می شود و این عایق بر کره نیرو وارد می‌کند و هادی را به سمت پایین می کشد تا زمانی که نیروی جاذبه به طرف پایین با نیروی ارشمیدس برابر شود .

اقدام کنید

خانم « فیلی پیا » مادر بزرگ ۶۳ ساله تصمیم گرفت
نیویورک تامیامی در فلوریدا پیاده روی کند . او به
رسید . در آنجا روزنامه نگارها با او مصاحبه کردن
خواستند بدانند که آیا اندیشه این راهپیمایی طولانی
به وحشت نینداخته است ؟ چگونه جرات کرد پای
تن به این سفر بدهد ؟ خانم « فیلی پیا » جواب
برداشتن یک قدم نیازی به شجاعت ندارد و این
است که من کردم . من تنها یک قدم را برداشتم و
نوبت به قدم بعدی رسید . بعد از قدم دوم ، قدم س
برداشتم و آنقدر ادامه داد م تا به اینجا رسیدم .

پس از هدف گذاری مهمترین اقدام « اقدام » است .
انسانهای موفق را از دیگران متمایز می کند در جرات
برای برداشتن قدمهای اولیه است . اگر اهداف خ
مشخص کنید و پس از برنامه ریزی اقدام و عملی ص
ندهید مانند این است که زمین را شخم بزنید اما دا
در آن نکارید .

درختی که از آغوش تو بزرگ تر است از دان
کوچک روئیده است . بنایی بلند از مشتی خاک س
شده است . سفری هزار فرسنگی با یک گام آغاز
است .

Physicsclass.blogsky.com